Einführung in die Theoretische Physik

Josef Rothleitner /WS 98/99

Inhalt

1) Newton schaffte das Gedankenwunder einer umfassenden
mathematischen Theorie der Natur:
Philosophiae naturalis principia mathematica. 1687

2) Die **Mechanik**
ist eine atomistische Theorie der Natur, die Grundideen stammen von Demokrit: Materie besteht aus "Atomen". Diese sind Elementarteilchen: sie sind unteilbar, unerzeugbar, unvernichtbar; sie bewegen sich im Laufe der Zeit im leeren Raum in gesetzmäßiger Weise.

Newton schuf zur mathematischen Beschreibung der Elementarteilchen das Konzept **Massenpunkt**. Ein newtonischer Massenpunkt (ZWL, m) ist eine zeitartige Weltlinie im **newtonischen Zaum**. Der grundlegende Begriff für die Bewegungslehre (Kinematik) ist **Beschleunigung**. Der zweite fundamentale Begriff ist **Kraft**; die Lehre von den Kräften ist die **Dynamik**.

3) **Fotomaterie**
ist eine undemokritische Art von Materie, die grundsätzlich nicht mechanisch beschrieben werden kann. Erzeugung und Vernichtung von Fotomaterie (z.B. Licht) finden ständig statt. Die Elektrodynamik ist in erster Linie Fotodynamik! Fotomaterie wird mathematisch beschrieben durch **Fotofelder im minkowskischen Zaum**.

4) Die elementaren Teilchen (Elektron, Proton, etc.) zeigen neben ihrer Teilchenstruktur auch Welleneigenschaften (Interferenz). Die **Quantenmechanik** beschreibt diese Teilchen als ausdehnungslose Objekte, die sich probabilistisch verhalten: **Punktquant**. Die Wellenfunktion ist ein Wahrscheinlichkeiten-Potential für alle Auftrittswahrscheinlichkeiten eines Punktquants.

Elektronen sind ununterscheidbar, sie gehorchen dem **Pauliprinzip**. Damit versteht man den Schalenaufbau der Atomhüllen. Die **Fermiverteilungsfunktion** für die Elektronen in einem Festkörper erklärt die wichtigsten Materialeigenschaften: Leiter, Halbleiter, Isolator.

Licht hat auch Quantenstruktur: **Photon**. Das Photonengas im thermischen Gleichgewicht wird als Bosegas ohne feste Teilchenzahl durch die Plancksche Strahlungsformel beschrieben

5) Die **Thermodynamik** ist eine phänomenologische Theorie des mittleren Verhaltens großer Ansammlungen von Teilchen in sogenannten **thermischen Gleichgewichtszuständen**. Sie braucht dazu nur sehr wenige Variablen. Entropie, Temperatur.

Die **Statistische Physik** macht allgemeine statistische Hypothesen über das Verhalten großer Systeme. Sie enthält die Thermodynamik als einfachsten Fall. Boltzmannfaktor.

Wer es wagt, die Wahrheit zu suchen,
der muß höchste Ansprüche stellen:
an sich selbst und an seine Lehrer.

Kapitel 1

Zur Philosophie und Geschichte der Physik

1.1 Was ist Physik?

Physik ist die Wissenschaft von der Natur. Sie stellt sich die Aufgabe, durch die wissenschaftliche Methode zur Erkenntnis der Natur zu gelangen.

Was heißt das? Was ist *Natur*? Was ist *Erkenntnis*? Wie kommt man zu Naturerkenntnis?

Der folgende Text soll den Sinn der Begriffe *Natur, Erkenntnis, Naturwissenschaft*, etc. in der Fachsprache der Physik klarmachen.

Natur ist nach dem Verständnis der Physiker jener Teil der Welt, dessen Ordnung und Wirken unabhängig ist von den Eingriffen des Menschen, das, worauf menschliches Handeln keinerlei Einfluß hat, *die ewigen, ehernen Gesetze der Welt*. Diese Naturgesetze zu erforschen und zu erkennen, ist Ziel und Aufgabe der Physik.

Die Erkenntnisse der Physik zeigen einerseits die unüberwindlichen Grenzen für menschliche Praxis auf, denn gegen die Naturgesetze kann der Mensch nichts tun; andererseits zeigen sie, was im Rahmen der Naturgesetze möglich ist. Durch letzteres wird die physikalische Wissenschaft zu einem mächtigen Werkzeug der Lebensgestaltung, insbesonders als Basis der Technik. *Technik* ist die Gesamtheit der praktischen Künste, die sich der Mensch erworben hat, der Inbegriff des Machbaren. Technische Praxis kann allerdings auch Schaden anrichten, deshalb muß die Umwelt vor schädlichen Eingriffen des Menschen geschützt werden. Die Natur im Sinne der Physik braucht und kann gar nicht geschützt werden, sie ist das Unveränderliche der Welt.

Ein wissenschaftlich veranlagter Mensch kann sich nicht mit einer emotionalen Liebe zur Natur zufrieden geben, er strebt nach Verständnis und Erklärung der natürlichen Vorgänge, da erst dadurch der Strom der Ereignisse einen Sinn erhält. Das Ziel, der Welt einen Sinn zu geben, ist durch bloße Beobachtung der Naturvorgänge nicht erreichbar, sondern nur durch aktive intellektuelle Schöpfung, durch Schaffung einer Theorie.

Mit bewundernswertem Scharfsinn erstellten die antiken Naturphilosophen den Vorentwurf für jene umfassende Naturerklärung, die als *mechanistisches Weltbild* in der Naturwissenschaft der Neuzeit größte Früchte trug. Die von den Griechen bereitgestellten Begriffe und Ideen haben bis ins 19. Jahrhundert als

Basis der Physik ausgereicht, und erst das, auf FARADAY zurückgehende, Konzept der *Fotomaterie*, und das Konzept der *Quanten* sind originale Erfindungen der Neuzeit.

Die *Theoretische Physik* hat primär die Aufgabe, die Vielfalt der Erscheinungen und Vorgänge in der physikalischen Welt zu *verstehen*, zu *erklären* und Orientierung für die Zukunft zu geben. Dies geschieht durch die Konstruktion einer möglichst umfassenden PHYSIKALISCHEN THEORIE. Was das ist, kann man erst dann richtig begreifen, wenn man ein Paradigma intensiv studiert hat. Kurz sei hier folgendes dazu gesagt:

Eine physikalische Theorie ist ein hypothetisch deduktives System, d.h. sie besteht aus grundlegenden Ideen, Begriffen, Konzepten und universellen Sätzen, durch die eine *mathematische Beschreibung* der Naturvorgänge gegeben wird. Das Fundament einer physikalischen Theorie besteht aus wenigen GRUND-SÄTZEN (Axiomen); diese sind zwar aus intensiver Analyse der Naturbeobachtungen gewonnen worden, sie sind letzlich aber freie Setzungen (Grund-Gesetze) des wohlgebildeten, schöpferischen menschlichen Geistes, die sich allerdings in unablässiger Prüfung an der Erfahrung bewähren müssen. Die Prüfung einer physikalischen Theorie erfolgt dadurch, daß aus den angenommenen Grund-Sätzen, allein mittels der Regeln der Logik und der Mathematik, *Folge-Sätze* abgeleitet werden; die Folge-Sätze sind (wenigstens teilweise) Aussagen über Sachverhalte in der Wirklichkeit, die also an der Erfahrung (experimentell) geprüft werden können. Wenn auch nur 1 Folge-Satz im Widerspruch steht zur Realität (nicht wahr ist, die Erfahrung nicht zutreffend beschreibt), dann ist die Theorie widerlegt (falsifiziert), denn es muß dann mindestens 1 Grund-Satz falsch sein. Prinzipiell müssen die Physiker dann eine neue Theorie suchen.[1] Weil aber eine gute physikalische Theorie einen großen Erfahrungsbereich annähernd zutreffend beschreibt, werden auch prinzipiell widerlegte Theorien mit gutem Nutzen weiter verwendet– unter sorgsamer Beachtung der erkannten Mängel.

Wir fügen hier ein einschlägiges Zitat von EINSTEIN ein:

Höchste Aufgabe der Physiker ist das Aufsuchen von allgemeinen Grundgesetzen, aus denen durch rein logisch-mathematische Ableitung das Weltbild zu gewinnen ist. Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde erkannt, daß die Grundgesetze einer physikalischen Theorie nicht aus der Erfahrung ableitbar sind, daß also Newtons Ausspruch hypotheses non fingo *ins Gegenteil verkehrt werden muß:*
Die primäre Aufgabe der theoretischen Physiker besteht darin, die Grundgesetze zu erfinden und mathematisch exakt zu formulieren. In der Mathematik liegt dabei das eigentlich schöpferische Prinzip. Die Konstruktion des physikalischen Weltbildes stellt die höchsten Anforderungen an die Exaktheit der Darstellung der Grundgesetze, die nur durch die mathematische Sprache erreichbar ist.

Wir verehren in der klassischen Mechanik die Wiege der modernen Physik. Mit ihr wurde zum erstenmal das Gedankenwunder eines logischen Weltsystems

[1] Die übliche Praxis ist allerdings weit von diesem Ideal entfernt.

geschaffen, dessen Aussagen mit solcher Schärfe aus den exakt formulierten Grundgesetzen hervorgingen, daß jeder abgeleitete Satz jeglichem Zweifel entrückt war.

Zusammenfassung

Die Physiker sind Realisten, denn sie glauben: Außerhalb unseres Bewußtseins gibt es etwas dauerhaft Existierendes. Dieses, *die physikalische Welt, die physikalische Wirklichkeit* ist unabhngig von unserem Bewußtsein, und es ist gesetzlich geordnet. Die physikalische Wirklichkeit kann durch eine mit mathematischen Begriffen formulierte Theorie zutreffend beschrieben werden. Die Theorie ist ein begriffliches Abbild der physikalischen Welt, das auf seinen Wahrheitsgehalt geprüft werden kann. Viele Zusammenhänge von Tatsachen finden auf diese Weise eine Erklärung. Aus dem Erfolg dieser Methode leiten wir Physiker das Recht ab, von Erkenntnisgewinn, von Fortschritt in der Naturerkenntnis zu sprechen.

Die Aufgabe des Naturforschers ist die Suche nach der Wahrheit, nach zutreffenden Antworten. Die physikalischen Theorien werden zwar schließlich durch wesentliche Forschungsergebnisse falsifiziert, stellen sich also als Irrtümer heraus, sie sind aber großartige Irrtümer und kommen der Wahrheit näher als alles andere; sie sind die bislang beste Erkenntnis der Natur.

Das mathematische Abbild der Wirklichkeit (der Dinge-an-sich; alles, was der Fall ist), das eine physikalische Theorie liefert, nennen wir auch die Vorstellung der Wirklichkeit. Wir werden die Wahrheit zwar nie besitzen, weil Verifikation einer Theorie logisch unmöglich ist; wir erkennen die Wahrheit jedoch zunehmend besser, in dem Maße als wir unsere Theorien verbessern. In diesem Sinne kann man Kant zustimmen, wenn er sagt: *Die Dinge-an-sich sind unerkennbar.*

Es ist sehr wichtig, das Ding-an-sich (das designatum) von seiner Vorstellung, seiner mathematischen Beschreibung (dem designans) klar zu unterscheiden. Sonst macht man leicht Fehler. Zur Erläuterung diene hier das folgende Beispiel:

Das Ding-an-sich ELEKTRON (designatum), wird im Rahmen verschiedener physikalischer Theorien durch verschiedene Vorstellungen beschrieben:

1. als MASSENPUNKT (in der Mechanik)
2. als PUNKTQUANT (in der Quantenmechanik)
3. als FELDQUANT VOM DIRAC-TYP (in der Quantenfeldtheorie)

Mit der quantenfeldtheoretischen Beschreibung des Elektrons haben die Physiker die bisher beste Erkenntnis dieses Dinges-an-sich erreicht.

Die *philosophia naturalis* NEWTONs und seiner Nachfolger, die heute als *klassische Mechanik* bezeichnet wird, war die historisch erste physikalische Theorie, die den Anspruch erheben konnte, eine umfassende Erklärung aller Naturvorgänge zu bieten; man konnte also vom *mechanistischen Weltbild* sprechen.

Die atomistischen Philosophen der Barockzeit hegten – inspiriert von der Lehre des Demokrit und den großen Erfolgen der newtonischen Theorie – die Hoffnung, daß alle Naturvorgänge letzten Endes durch die Mechanik erklärt werden würden, wenn nur alle fundamentalen Kräfte erforscht sein werden.

Diese Hoffnung mußte aufgegeben werden, als durch Entdeckungen Faradays und seiner Nachfolger schließlich klar wurde, daß das Licht – allgemeiner gesagt: die *Foto-Materie* in all ihren möglichen Zuständen – im Rahmen der Konzepte der Mechanik prinzipiell nicht beschrieben werden kann. Weder als Aggregat von besonders feinen und stets sehr schnellen Teilchen (wie Newton glaubte), noch als Wellenbewegung einer unvernichtbaren feinen Substanz *Aether* (wie Huygens glaubte).

Die Mechanik ist seit der Formulierung der Maxwell - Hertzschen Theorie für die Fotomaterie als umfassende Theorie aller Naturvorgänge nicht aufrecht zu halten; sie war nur mehr für einen Teil der Materiearten (jene mit klassisch atomistischer Struktur) zuständig. Aber auch in diesem Bereich wurde sie in unserem Jahrhundert widerlegt. Zum einen durch die einsteinische Relativitätstheorie; zum anderen durch die Entdeckung der Quantenerscheinungen.

Obwohl wir heute wissen, daß die klassische Mechanik zu einer Vielfalt von gesicherten Erfahrungen prinzipiell in Widerspruch steht, hat sie weiterhin eine große Bedeutung in der Physik. Sie beschreibt einen noch sehr großen Erfahrungsbereich, der viele wichtige technische Anwendungen hat, ausreichend richtig. Über diesen praktischen Nutzen hinaus hat die Mechanik einen hohen ästhetischen Reiz, und sie ist als sehr anschauliches Paradigma häufig eine hilfreiche Quelle für weitergehende physikalische Inspiration und Erkenntnis.

Die klassische Mechanik wird für alle Zeiten als eine der größten Schöpfungen des menschlichen Geistes gelten. Sie ist in ihrer Gesamtheit nicht das Werk eines einzelnen Genies, sondern eine Frucht systematischen geistigen Ringens durch 2 Jahrtausende. Wesentliche Grundideen stammen von den atomistischen Naturphilosophen des antiken Griechenlandes; der entscheidende Durchbruch gelang erst in der Neuzeit, Kopernikus, Kepler, Galilei, Descartes, Newton, Huygens sind die Baumeister des Fundamentes, Euler, Lagrange, Laplace, Hamilton, Jacobi führten mittels der neuen Mathematik (Analysis) die Theorie zu einer intellektuellen Höhe, die den gebildeten Kennern hohen Genuß bereitet, die mathematischen Laien aber abweist.

> *Die Trennungslinie zwischen den 2 Kulturen im Sinne von C. P. Snow verläuft zwischen denen, die dank mathematischer Bildung die Schönheit der Natur begreifen, und jenen, denen dieses höchste geistige Erlebnis versagt bleibt.*
> *Richard P. Feynman*

Diese Meinung eines der größten Physiker der 2. Hälfte des 20. Jahrunderts ist wohl eine treffende Erklärung, warum die Entfaltung einer naturwissenschaftlichen Kultur so schwierig ist.

Viele müssen scheitern
bis Großes gelingt.

1.2 Die Entwicklung der Physik von der Antike bis Newton

Grundlegende Anschauungen, Begriffe und Ideen der mechanischen Theorie der Natur stammen von den Griechen der Antike. LEUKIPPOS und DEMOKRITOS (470-380 v. Chr.) bezeichnen als *Elemente*, als die letzten Grundbegriffe, das *Leere* und das *Volle*. Das Leere nannten sie auch das *Nichtseiende*, das Volle auch das *Seiende*; und sagten, daß das Seiende nicht eher sei als das Nichtseiende, die Körper nicht eher als das Leere.

Heute nennen wir das Leere RAUM-ZEIT, das Seiende MATERIE und sagen:

MATERIE IST IN ZEIT UND RAUM

Demokrit lehrt, daß alle Materie aus kleinen, unteilbaren, unveränderlichen, Teilchen (*Atomen*) zusammengesetzt ist. Er nimmt viele verschiedene Arten von Atomen an; diese sind ständig in Bewegung, stoßen einander und können aneinander haften. Auf diese Weise kommen durch Zusammensetzung die verschiedenen wahrnehmbaren Körper zustande. Von EPIKUR sind uns schriftliche Darstellungen dieser Lehre überliefert, die eindrucksvoll die geistige Blüte der Antike widerspiegeln.

Der steile Aufstieg des naturwissenschaftlichen Zeitalters im alten Griechenland begann im 6. Jahrhundert v. Chr. , am Ende des 3. Jahrhunderts v. Chr. zeigte sich eine deutliche Verlangsamung, schließlich kam die Entwicklung in der ersten christlichen Zeit völlig zum erliegen, als die Probleme der neuen Theologie in das Zentrum des Interesses rückten. Der byzantinischen Kultur und der im 9. Jahrhundert n. Chr. beginnenden Renaissance ist es zu verdanken, daß die Erkenntmisse der Antike nicht verloren gingen. Die Scholastiker übernahmen das Wissen islamischer Gelehrter und fanden schließlich den Anschluß an die antiken Quellen; vor allem die Lehren des ARISTOTELES wurden eingehend studiert und übernommen.

Die Morgendämmerung der modernen Physik beginnt mit

COPERNICUS(1473-1543), dessen Buch über **Die Kreisbewegungen der Sphären des Weltalls** eine Geistesbewegung in Gang setzte, die als *kopernikanische Wende* allgemein bekannt ist. Die wirkliche Bedeutung der heliozentrischen Weltansicht als einer wissenschaftlichen Wahrheit konnte aber erst nach NEWTON klar werden, als man gelernt hatte, *wahre Bewegung* zu erkennen.

COPERNICUS schrieb:

Die Fixsternsphäre ist jener Raum des All, der fest und unbeweglich gegründet ist. Gott hat sie mit vielen strahlenden Kügelchen ausgeschmückt, daß wir an ihnen, die ohne Zweifel an ihrem Platz festhalten, die Stellungen und Bewegungen der Planeten wahrnehmen und genau beschreiben können. Die Sonne ist einer der Fixsterne; sie, die in göttlicher Majestät erstrahlt, hat Gott als seinen Statthalter in die Mitte des Systems der Planeten gestellt.

Ich schreibe der Erde bestimmte Bewegungen zu und habe gefunden, daß, wenn die Bewegungen der übrigen PLaneten auf den Kreislauf und die Rotation der Erde bezogen werden, die Gesetze und Größen der Gestirne und all ihre Bahnen eine vollständige Erklärung finden.

Die hier ausgesprochene Idee eines absoluten Raumes, sollte sich zwar im Laufe der folgenden Epoche als falsch erweisen, doch die Frage nach **wahrer Bewegung** und deren **physikalischen Ursachen** wurde zum zentralen Problem der Naturwissenschaft.

Kepler (1571-1630) gibt in seinem wegweisenden Buch **Neue Astronomie** (1609) für die physikalischen Ursachen der Planetenbewegungen die folgende Erklärung:

Der Sonnenkörper ist die Quelle der Kraft, die alle Planeten herumführt. Sie dreht sich wie eine Drehbank und sendet aus sich in die Weite der Welt eine immaterielle Spezies ihres Körpers *aus. Diese Spezies dreht sich mit dem Sonnenkörper nach Art eines reißenden Strudels, der sich über die ganze Weite der Welt hin erstreckt und die Planetenkörper im Kreis herum mit sich fortträgt, in stärkerem oder schwächerem Zug, je nach dem sie nach dem Gesetz ihrer Ausströmung dichter oder dünner ist. ...*

Schließlich habe ich gezeigt, daß die besonderen Beweger der Planeten in einer Disposition der Planetenkörper bestehen, wie sie im Magnet vorhanden ist. Danach wird die ganze Art der Himmelsbewegungen von rein materiellen, d.h. magnetischen Kräften bewegt, ausgenommen allein die Drehung des Sonnenkörpers an seinem Ort, wofür eine Lebenskraft notwendig zu sein scheint.

Diese Ansichten wurden von Descartes weiter ausgebaut und nachdrücklich vertreten. Vor Descartes nennen wir aber

Galilei (1564-1642), der als Vater des modernen naturwissenschaftlichen Zeitalters angesehen wird, weil er die strenge Prüfung der Theorie durch Experimente in die Physik einführte. Galilei übte fruchtbare Kritik an der Physik des Aristoteles, besonders an dessen Bewegungslehre; vor allem kritisierte er die Idee eines absoluten Raumes und betonte die Relativität von Bewegungen. Obwohl er einen viel zu weit gehenden Relativismus der Bewegungen vertrat, der mit dem viel später erkannten *Relativitätsprinzip* der klassischen Mechanik nicht viel zu tun hat, sprechen wir heute ihm zur Ehre vom **galileischen Relativitätsprinzip**. Galileis wichtigste Erkenntnisse sind das Beharrungsgesetz, wonach es keiner Kraft bedarf, wenn ein Körper eine geradlinig gleichförmige Bewegung ausführt; und das Fallgesetz. Er erkannte, daß das Problem der Bewegung den Angelpunkt der Physik darstellte; für ihn und seine Nachfolger stand daher die Untersuchung von Bewegungen im Zentrum des Interesses. Die brennenden physikalischen Fragen jener Zeit waren:

Was ist Bewegung? Wie kann man diese feststellen? Wie verlaufen Bewegungen zeitlich und räumlich? Wie kann man sie messend erfassen? Was ist die Ursache wahrer Bewegung?

Descartes (1596-1650) lieferte wesentliche Beiträge zum Problem der Bewegung, die in seinem Buch **Die Prinzipien der Philosophie** 1644 veröffentlicht wurden. Er prägte den Begriff *Bewegungszustand* eines Körpers. Er gab eine genauere Formulierung des Beharrungsgesetzes (Trägheitsgesetzes), die NEWTON unverändert als I. Axiom seiner Theorie übernahm. Er entdeckte den Erhaltungssatz des Impulses und führte dabei den Begriff einer *quantitas motus* ein. Dieses quantitative Maß für Bewegung diente NEWTON als Basis für seinen grundlegenden Begriff *Änderung der Bewegungsmenge*; diese, und nicht der Impuls, stellte sich als das physikalisch relevante Maß für wahre Bewegung heraus.

DESCARTES vertrat außerdem nachdrücklich die Ansicht, daß es ein *Vacuum*, d.h. ein Leeres, in dem sich keine Substanz befindet, nicht geben kann. Diese Lehre wurde zwar von Newton und dessen Nachfolger zunächst erfolgreich beiseite geschoben, doch in der heutigen Physik, wo raumerfüllende Felder alles beherrschen, und das Vacuum eine komplexe Quantenstruktur besitzt, ist sie wieder auferstanden.

Die Erstellung einer brauchbaren Bewegungslehre und der, dieser zu Grunde liegenden, geometrischen Struktur von Zeit und Raum war das eine fundamentale Problem der damaligen Physik; zum anderen war es aber notwendig, ein einfaches und doch leistungsfähiges mathematisches Konzept zur Beschreibung der Materie zu erfinden. Dieses wurde im Begriff **Massenpunkt** gefunden, zu dem wohl die Wiederentdeckung des atomistischen Weltbildes des DEMOKRIT hinführte.

GASSENDI entdeckte um 1640 das Weltbild EPIKURs wieder; er schrieb:

> *Wenn die Epikureer sagen, der Kosmos bestehe aus Atomen, so ist das richtig. Die Atome sind die materia prima; sie allein sind. Das Vacuum ist bloß der Ort und verschafft die Trennbarkeit. Die Atome werden bewegt durch eine treibende Kraft.*

Auch das Relativitätsprinzip betont er als eine wichtige Erfahrungstatsache und formuliert es in der Form:

> *Wenn das Objekt, auf dem wir stehen, bewegt wird, dann erscheinen alle unsere Bewegungen und auch die Bewegungen der von uns bewegten Dinge so als ob dieses Objekt ruhen würde.*

Diese Erfahrungen bezogen sich auf gleichmäßig dahinsegelnde Schiffe, auf denen ein Körper dicht am Mast bleibend herunterfällt, auch bei sehr großer Fahrgeschwindigkeit gegen das sichtbare Ufer. Leider wird nicht ebenso nachdrücklich darauf hingewiesen, daß in einer fahrenden Kutsche auf rauher Landstraße die Verhältnisse ganz anders sind.

HUYGENS (1629-1695), der 14 Jahre ältere Zeitgenosse NEWTONs, lieferte viele wichtige Beiträge zur neuen Physik; besonders bekannt ist die Erfindung der Pendeluhr, die der Zeitmessung eine neue Dimension eröffnete. Er war aber auch der bedeutendste Widersacher NEWTONs; zum einen in der Erklärung des Lichtes als einer mechanischen Wellenbewegung des Äthers (in Analogie zum Schall); zum anderen als konsequenter Vertreter des Relativitätsprinzipes. Er hält NEWTON, der *wahre*, d.h. *absolute Bewegung* als fundamentales Konzept einführt (Eimerversuch) für im Irrtum befindlich.

Der diesbezügliche Briefwechsel zwischen HUYGENS und LEIBNIZ aus dem Jahre 1694 sei hier in den wesentlichen Passagen zitiert, da er das Ringen um eine brauchbares Konzept für Bewegung illustriert und das notwendige Problembewußtsein herstellt, das für das Verständnis des fundamentalen Begriffes BESCHLEUNIGUNG eine unabdingbare Voraussetzung ist:

HUYGENS: *Ich halte es für ganz gewiß, daß es keine absolute Bewegung,* [2] *sondern nur eine relative Bewegung gibt. Ich lasse mich darin nicht durch die Gründe und Experimente in Newtons Principia beirren, da Newton sich, wie ich weiß, im Irrtum befindet. Descartes hat keine genügende Kenntnis dieses Gegenstandes besessen.*

Darauf antwortet LEIBNIZ: *Wenn die bewegende Kraft der Körper etwas Reales ist – was man zugestehen muß – muß auch die von ihr verursachte Bewegung einem Subjekt real zukommen. Wenn 2 Körper A und B sich einander nähern, so werden allerdings alle Phänomene die gleichen sein, gleichviel, ob man dem einen oder anderen der 2 Körper Bewegung oder Ruhe zuschreibt. Jeder einzelne kann also ebensogut als ruhend angesehen werden. (Das ist es wohl, was Sie verlangen.) Sie werden indes nicht leugnen, daß jedem Körper wirklich ein bestimmter Grad von Bewegung* [3] *(oder Kraft, wenn Sie wollen) zukommt, trotz der Gleichwertigkeit der Annahmen über deren Verteilung. Allerdings ziehe ich daraus die Folgerung, daß es in der Natur noch etwas anderes gibt als die Geometrie von Raum+Zeit zur Bestimmung bringen kann; ein übergeordnetes Prinzip: die* Kraft. *Newton anerkennt die Äquivalenz der Hypothesen über die Bewegung nur für den Fall der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, glaubt jedoch, daß bei der Kreisbewegung sich absolute Bewegung erkennen läßt. Ich habe aber Gründe, daß nichts das Gesetz der* allgemeinen Äquivalenz *durchbricht.*

Diese Sätze zeigen sehr klar das Problem auf, mit dem die größten Geister jener Zeit rangen: Einerseits wird erkannt, daß Bewegung einen absoluten Zug hat, andererseits weiß man aber auch, daß es keine absolute Geschwindigkeit gibt, sondern nur relative (allgemeine Äquivalenz = Relativitätsprinzip). Wie unsicher Leibnitz im Grunde ist, wird sein nächster Brief zeigen, der geradezu ein sacrilegium intellectus enthält.

Darauf antwortet HUYGENS: *Ich war früher betreffs der Kreisbewegung derselben Ansicht wie Newton; seit 2-3 Jahren habe ich die richtigere Anschauung gewonnen, die auch Sie vertreten. Nur darin, daß bei der relativen Bewegung mehrerer Körper jeder einen bestimmten Grad wirklicher Bewegung (oder Kraft) besitzt, kann ich Ihnen nicht beistimmen.*

Man sieht, daß HUYGENS das Konzept der Beschleunigung und deren Absolutheit nicht zu erfassen vermag.

Darauf antwortet schließlich LEIBNIZ: *Auch Sie sind nun, wie ich sehe derselben Ansicht bezüglich aller Arten der Bewegung. Ich halte dafür, daß alle Annahmen über Bewegung äquivalent sind, und daß, wenn man bestimmten Körpern bestimmte Bewegungen zuschreibt, dafür kein anderer Grund als die Einfachheit der Hypothese sich angeben läßt; alles in allem, darf man die einfachste*

[2] er meint Geschwindigkeit
[3] er meint Beschleunigung

Annahme immer für die wahre halten.[4] *Da ich somit kein anderes Kennzeichen als dies anerkenne, so glaube ich, daß der Unterschied zwischen uns nur in der Ausdrucksweise besteht, die ich (unbeschadet der Wahrheit) dem gewöhnlichem Sprachgebrauche anzunähern suche.*

Newton (1643-1727) gehört zu den größten Genies der Naturwissenschaft; ihm gelingt es, den absoluten Zug an der Bewegung zu erfassen. Seine Unterscheidung von **wahrer** und **scheinbarer** Bewegung gleicht der Zerschlagung des gordischen Knotens. Damit wird der Weg frei für die Dynamik, die im *Bewegungsgesetz* eine tragfähige mathematische Formulierung findet. Die lange gesuchte Lehre von der wahren Bewegung entfaltete sich fruchtbar. Das kopernikanische Weltbild konnte nun von einem Vernunftglauben auf die Stufe wissenschaftlicher Erkenntnis gehoben werden mit der Formulierung: *Die Sonne hat (fast) keine wahre Bewegung, die Erde hat wahre Bewegung um die Sonne.*

Newton gelang es, die Gesamtheit der damaligen physikalischen Erkenntnisse in mathematischer Sprache zu einer physikalischen Theorie zusammenzufassen. Diese Theorie nannte er *philosophia naturalis*, heute wird sie als *Klassische Mechanik* bezeichnet; sie krönt ein über 2000 Jahre dauerndes Ringen um Naturerkenntnis mit einem umfassenden physikalischen Weltbild (mechanistisches Weltbild), das bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts ausschließliche Gültigkeit hatte.

Literatur:

E.Mach, Entwicklung der Prinzipien der Dynamik.
M. Fierz, Vorlesungen zur Entwicklungsgeschichte der Mechanik. (1972)
S. Sambursky, Der Weg der Physik. (1975)
P. Feyerabend, Wider den Methodenzwang. (1983)
Karl von Meyenn, Triumph und Krise der Mechanik. (1990)

[4] Sic! oh Leibniz!

Die Werke der Meister sind groß,
zum staunen für alle, die daran ihre Freude haben.

1.3 Von Newton zu Einstein

Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica 1687

Die rationale Mechanik ist die genau dargestellte d.h. mathematisch formulierte und durch Experimente erwiesene Wissenschaft, welche von den Bewegungen und den dazu erforderlichen Kräften handelt. Die Alten befaßten sich hinsichtlich der Kräfte hauptsächlich mit den Handfertigkeiten: Hebel, Rolle, Winde, Schraube und Keil. Die Schwerkraft, da sie keine Handkraft ist, betrachteten sie kaum näher; sie war ihnen nichts weiter als die Ursache für das Gewicht von Körpern, die durch die Handkräfte bewegt werden sollen. Wir aber, die wir nicht die Technik, sondern die wissenschaftliche Erkenntnis der Natur anstreben, betrachten als Hauptsache jene Umstände, welche sich auf die Schwerkraft, die Kraft der Elastizität und den Widerstand von Flüssigkeiten und auf andere derartige Kräfte beziehen. Daher stellen wir unsere Einsichten als mathematische Prinzipien der Naturlehre dar.

Der Kern der Physik besteht für uns darin, aus den Erscheinungen der Bewegung die Kräfte der Natur zu erforschen, und hierauf durch diese Kräfte alle Erscheinungen zu erklären. Aus den Bewegungen der Planeten wird die genaue Wirkung der Schwerkraft abgeleitet, vermöge welcher alle Körper sich anziehen mit einer Kraft, die dem negativen Quadrat der Entfernung proportional ist. Aus dieser Kraft werden dann mathematisch die Bewegungen der Kometen, des Mondes und des Meeres abgeleitet.

Viele Gründe lassen mich vermuten, daß alle übrigen Erscheinungen der Natur auf dieselbe Weise aus gewissen, jetzt noch unbekannten Kräften abgeleitet werden können. Ich denke, daß ein Teil dieser Kräfte die Teilchen der Körper gegeneinander zieht und also zum Körper zusammenhält; ein anderer Teil eine Abstoßung der Teilchen bewirkt. Bis jetzt haben die Physiker vergeblich versucht, die Natur durch diese unbekannten Kräfte zu erklären; ich bin jedoch guter Hoffnung, daß die hier angestrebten Grundsätze schließlich erfolgreich sein werden.

Wahre Zeitdauer, wahre Bewegung:

Zeit, Raum, Ort und Bewegung als allen bekannt erkläre ich nicht. Ich weise nur darauf hin, daß man diese Größen gewöhnlich unmittelbar auf die Sinneseindrücke bezieht, was zu vielen Irrtümern führt. Es ist daher notwendig zwischen wahren und scheinbaren oder mathematischen und gewöhnlichen Größen zu unterscheiden.

Die **wahre oder mathematische Zeit** *verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand. Wir nennen sie auch Dauer.*

Die scheinbare oder gewöhnliche Zeit ist ein fühlbares und äußerliches, entweder genaues oder ungleiches Maß der Dauer, dessen man sich gewöhnlich statt *der wahren Zeit bedient. Die natürlichen Tage, die gewöhnlich als Zeitmaß für gleich gehalten werden, sind genau betrachtet ungleich. Diese Ungleichheit korrigieren die Astronomen, indem sie die Bewegung der Himmelskörper nach der wahren Zeit messen. (Zeitgleichung).*

Die **wahren Bewegungen** *der Körper zu erkennen und von den scheinbaren zu unterscheiden, ist sehr schwierig, weil dies sinnlich nicht direkt erkannt werden kann.*

Im Alltag beurteilen wir Bewegung gewöhnlich aus der Veränderung des Ortes eines Körpers relativ zu anderen; dies ist im allgemeinen aber nur eine scheinbare Bewegung. Es ist in der Naturlehre von entscheidender Wichtigkeit, von den bloßen sinnlichen Erfahrungen zu abstrahieren; sonst ist Erkenntnis nicht möglich. Das Kriterium, durch welches wahre Bewegung von scheinbarer unterschieden werden kann, ergibt sich aus den wirkenden Kräften.

NEWTON ist hier sehr nahe an der Formulierung: Wirkt auf ein Teilchen keine Kraft, dann ist dessen Bewegung nur scheinbar; je größer die Kraft, die auf ein Teilchen wirkt, desto größer ist dessen wahre Bewegung.

Seine Sätze über wahre Bewegung erläutert NEWTON an 2 Experimenten:

a) Man hänge ein Gefäß an einem langen Faden auf, den man verdrillt; hierauf fülle man es mit Wasser und halte zugleich alles in Ruhe. Versetzt man nun das Gefäß mit einer plötzlichen Kraft in Kreisbewegung, welche durch den sich aufdrillenden Faden längere Zeit anhält, dann wird die anfangs ebene Wasseroberfläche allmählich in der Mitte absinken und an den Wänden des Gefäßes in die Höhe steigen und also eine hohle Form annehmen. (Diesen Versuch habe ich selbt gemacht).

Im Anfang ist die Bewegung des Wassers relativ zum Gefäß am größten, dies ist aber nur eine scheinbare Bewegung, die Wasseroberfläche bleibt eben, woran man erkennt, daß noch keine wahre Bewegung vorliegt.

Später ist die Bewegung des Wassers relativ zum Gefäß klein, die hohle Form der Oberfläche zeigt aber die wahre Kreisbewegung des Wassers an, die schließlich am größten wird, wenn das Wasser relativ zum Gefäß ruht.

b) Zwei Kugeln werden mittels eines Fadens verbunden und um den gemeinsamen Schwerpunkt gedreht. Aus der Spannung des Fadens erkennt man, daß dieser die Kugeln mit einer Kraft gegeneinander zieht. Diese Kraft zeigt an, daß eine wahre Kreisbewegung vorliegt. Verändert man die Drehbewegung, dann erkennt man an der Vergrößerung oder Verminderung der Fadenspannung die Zu- oder Abnahme der wahren Bewegung. Auf diese Weise kann man sowohl die Größe als auch die Richtung der wahren Kreisbewegung herausfinden, und zwar auch dann, wenn im unendlich großen leeren Raum nichts äußerlich Erkennbares vorhanden ist womit die Kugeln verglichen werden können.

Damit ist es NEWTON gelungen, den Begriff **wahre Bewegung** ohne Bezugnahme auf Ortsveränderung klar zu machen; der **absolute Zug einer Bewegung** ist erkannt.

Die Gesetze der Bewegung (Axiomata sive leges motus):

Im folgenden wird ausführlich gelehrt, auf die wahren Bewegungen aus ihren Ursachen zu schließen; und umgekehrt: aus den wahren Bewegungen die Ursachen und Wirkungen abzuleiten.

1. Grund-Satz (Axiom):

> *Jedes Teilchen verharrt in einem Zustand der Ruhe oder der gleichmäßig geradlinigen Bewegung, solange es nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Bewegungszustand zu ändern.*

Heute formuliert man diesen Grund-Satz besser so:

**Jedes Teilchen bewegt sich unbeschleunigt,
solange keine Kraft auf es einwirkt.**

Um den Inhalt dieses Satzes zu begreifen, muß man die grundlegenden Begriffe **Beschleunigung** und **Kraft** mathematisch präzise verstehen. Dementsprechend wird die 1. Aufgabe die mathematische Formulierung des Konzeptes Beschleunigung sein.

Zur Erläuterung seines 1. Axioms führt Newton an:
Geschosse z.B., insofern sie nicht durch den Widerstand der Luft (eine Kraft) verzögert und durch die Schwerkraft (eine weitere Kraft) abgelenkt werden, verharren in geradlinig gleichmäßiger Bewegung.

Der eigentliche Sinn des 1. Axioms besteht darin, daß Newton unter allen Arten von Bewegungszuständen, die ein Teilchen haben kann, bestimmte auszeichnet, die er geradlinig gleichmässige Bewegungen nennt; diese sind dadurch ausgezeichnet, daß sie keiner *äußeren Ursache bedürfen* , also immer dann vorliegen, wenn ein Teilchen keinerlei Einwirkung unterliegt. Wir nennen die geradlinig gleichmäßigen Bewegungen besser **unbeschleunigte Bewegungen**.

Newtons 1. Axiom ist heute überflüssig, da der Satz: Jedes Teilchen ist in unbeschleunigter Bewegung solange keine Kraft auf es wirkt. eine Konsequenz des folgenden 2. Axioms ist.

2. Grund-Satz (Axiom):

> *Die Änderung der Bewegung ist proportional der einwirkenden Kraft und gehieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.*

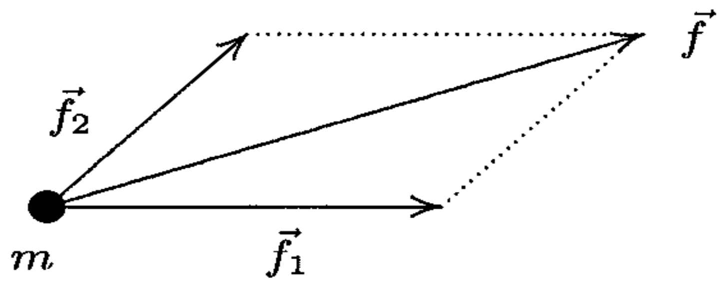
Dieses Gesetz ist das eigentliche Fundament der Mechanik. In seiner mathematischen Formulierung enthält es das 1. Axiom als Sonderfall, da unter *Änderung der Bewegung* das Produkt aus der Masse des Teilchens und seinem Beschleunigungsvektor zu verstehen ist. Das Maß für die wahre Bewegung eines Teilchens ist seine Beschleunigung. Diese ist nur dann $\neq 0$, wenn eine Kraft auf das Teilchen wirkt.

Die heutige prä-mathematische Formulierung des 2. Axioms lautet:

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{f} \qquad \textbf{(ist gleich wie!)}}$$

Der Kraftvektor $\vec{f}$ setzt sich aus allen auf das Teilchen einwirkenden Teilkräften zusammen. (Fig. 1)

$$\vec{f} = \sum \vec{f}_\alpha$$



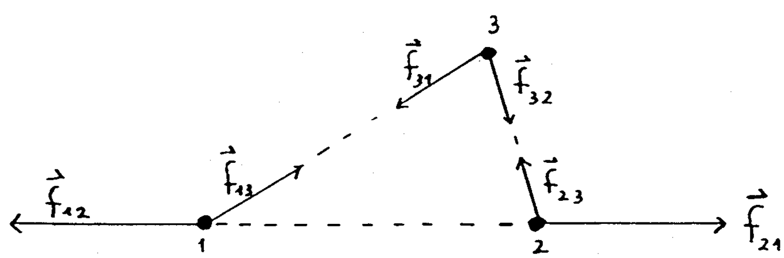
3. Grund-Satz (Axiom):

Die Wirkung (actio) ist stets der Gegenwirkung (reactio) gleich.

Dieser Satz sagt aus, daß die Krafteinwirkungen 2-er Körper aufeinander stets gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung sind.

Genauer heißt dies: Je zwei Teilchen stehen in Wechselwirkung, dabei wirken sie zu jeder Zeit mit entgegengesetzt gleichen Kräften in Richtung der Verbindungsgeraden aufeinander. (Fig. 2)

$$\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$$



Zur Erläuterung seines 3. Axioms fügt Newton die Sätze hinzu:
Jeder Gegenstand, welcher einen anderen drückt oder zieht, wird ebenso stark durch diesen gedrückt oder gezogen. Zieht z.B. ein Pferd an einem Seil einen Stein fort, so wird das erstere gleich stark gegen den letzteren zurückgezogen, denn das nach beiden Seiten gespannte Seil wird das Pferd gegen den Stein und

diesen gegen jenes drängen; es verhindert ebenso stark das Fortschreiten des einen als es das Fortdrücken des anderen befördert.

Das 3. Axiom ist eine generelle Aussage über die mögliche Form von Wechselwirkungskräften. Wir werden später sehen, daß hier ein fundamentales Naturgesetz einen ersten Ausdruck findet; dieses fundamentale Naturgesetz, wird heute als der dynamische Teil des **Relativitäts-Prinzips** bezeichnet.

Die **Kraft** spielt in NEWTONs System die Rolle eines immateriellen agens, das durch den leeren Raum, ohne Vermittlung einer materiellen Substanz, die Wechselwirkung der Teilchen bewirkt. Dies ist für viele Physiker nicht befriedigend, selbst für NEWTON war es das nicht, wie eine der folgenden Stellen belegt:

Über die Schwerkraft schreibt NEWTON:

Es ist nicht zu bezweifeln, daß alle Körper in der Umgebung der Erde gegen diese schwer sind, und zwar proportional zur Menge der Materie in jedem, daß der Mond proportional seiner Masse gegen die Erde schwer ist, daß das Meer gegen den Mond schwer ist, daß alle Planeten wechselseitig gegeneinander, und die Kometen gegen die Sonne schwer sind. Wir nehmen daher an, daß alle Körper gegeneinander schwer seien.

Die Masse ist eine Eigenschaft eines jeden Teilchens, welche weder verstärkt noch vermindert werden kann. Ich behaupte aber nicht, daß die Schwerkraft den Teilchen als Eigenschaft zukomme, da sie mit der gegenseitigen Entfernung der Teilchen abnimmt.

Jeder Fixstern könnte das Zentrum eines Planetensystems sein, das dem unsrigen ähnlich ist. Die Fixsterne sind in ungeheurer Entfernung voneinander, dies stellt sicher, daß sie nicht vermöge der Schwerkraft aufeinander fallen.

Ich habe bisher die Erscheinungen der Himmelskörper und die Bewegung des Meeres durch die Schwerkraft erklärt. Diese wirkt proportional zu den Massen der Teilchen und erstreckt sich nach allen Seiten, wobei sie mit dem Quadrate der Entfernung abnimmt. Die Schwere gegen die Sonne ist aus der Schwere gegen jedes ihrer Teilchen zusammengesetzt und nimmt genau mit dem negativen Quadrat der Abstände ab.

Aber ich habe **nirgends die Ursache der Schwerkraft** *angegeben. Ich habe noch nicht dahin gelangen können, den Grund dieser Eigenschaften der Schwerkraft aus den Erscheinungen abzuleiten, und Hypothesen erdenke ich nicht. Es genügt, daß die Schwerkraft existiert, daß sie nach den dargelegten Gesetzen wirkt und daß dadurch alle Bewegungen der Himmelslkörper und des Meeres erklärt werden können.*

Trotzdem will ich zugeben, daß die bloße Anziehung entfernter Materieteile kein Gedanke ist, der einem Naturphilosophen genügen oder ihn befriedigen kann. Die Behauptung, daß die Schwerkraft etwas den Körpern Angeborenes, Eigenes und Wesentliches sei, so daß die Körper aufeinander durch das Vakuum aus der Ferne wirken, ohne Vermittlung von irgend etwas Anderem, durch das diese Wirkung von einen zum anderen fortgepflanzt werden kann, ist eine reine Absurdität.

Ich frage mich also: Was ist da im Raum, wo praktisch keine stoffliche Mate-

rie vorhanden ist, und was bewirkt, daß Sonne und Planeten anziehende Kräfte aufeinander ausüben ohne dichte Materie dazwischen?

Descartes nimmt an, daß der Himmel mit einer gewissen, sehr lockeren Substanz ausgefüllt ist, deren Wirbelbewegungen die Bewegung der Himmelkörper verursachen soll. Dies ist aber nicht annehmbar, weil es der Tatsache widerspricht, daß Planeten und Kometen sich in derselben Himmelsgegend gänzlich verschieden bewegen; man müßte also mehrere verschiedene Wirbel annehmen.

Es würde hier der Ort sein, etwas über eine gewisse höchst subtile ätherische Substanz hinzuzufügen. Durch die Wirkung dieser ätherischen Substanz ziehen sich die Teilchen der Körper wechselseitig in den kleinsten Entfernungen an und haften aneinander, wenn sie sich berühren. Durch sie wirken die elektrischen Körper in den größten Entfernungen sowohl anziehend als auch abstoßend. Mittels dieser ätherischen Substanz strömt das Licht aus, wird es reflektiert, gebrochen, gebeugt und erwärmt es die Körper. Alle Gefühle werden durch sie erregt, die Glieder nach Belieben bewegt, die Sinneseindrücke pflanzen sich mit ihrer Hilfe von den äußeren Organen durch die Nerven bis zum Gehirn fort und hierauf von diesen zu den Muskeln. Es wird noch einer großen Anzahl von Versuchen bedürfen, um genau die Gesetze bestimmen zu können, nach welchen diese elektrische und schwingungsfähige ätherische Substanz wirkt.

Diese Sätze muten wie eine prophetische Vorausahnung der Erkenntnisse an, die von den Physikern der folgenden Jahrhunderte gewonnen wurden, insbesonders können sie als treffende Formulierung des Forschungsprogrammes von Faraday angesehen werden.

Newton hatte den Durchbruch erzielt, seine principia gaben der Welt ein tragfähiges Fundament für eine umfassende Theorie der physikalischen Erscheinungen. Aber erst durch die nachfolgende Formulierung der Theorie in der mathematischen Sprache der sich rasch entwickelnden Analysis wurde die notwendige klare Einsicht erreicht, die die Mechanik als allgemeines Verfahren zur Behandlung beliebiger physikalischer Probleme brauchbar machte. An 1. Stelle muß hier Euler genannt werden, sodann dessen Nachfolger in Berlin Lagrange.

Euler verfaßte beispielhafte Lehrbücher über alle wichtigen Gebiete der Mathematik und der Physik, darunter die 2-bändige *Mechanik* (1734-1736), *Musiktheorie* (1739), *Theorie der Planetenbewegung* (1744), *Schiffstheorie* (1749), *Neue Grundsätze der Artillerie* (1749) und die *Dioptrica* (1769-1771). Besonders großen Erfolg hatten die 1768-1772 veröffentlichten **Briefe an eine deutsche Prinzessin**, in denen er nicht nur eine populäre Darstellung der Physik gab, sondern sich auch mit den philosophischen Problemen seiner Zeit auseinandersetzte.

Als Beispiel sei hier einer dieser Briefe in den wesentlichen Passagen zitiert:

... Die glückliche Erklärung der meisten Erscheinungen der Natur, die man aus den mathematischen Grundgesetzen der Physik herleitet, beweist hinlänglich daß die Hypothesen vollkommen wahr sind. Jetzo kommt es darauf an, die wahre

Quelle *der anziehenden Gravitationskraft zu entdecken. Dies ist ein Problem der Metaphysik, nicht der Mathematik.*

Die Englischen sagen, es sei eben eine wesentliche Eigenschaft aller Körper, einander anzuziehen. Andere (die Cartesianer) sagen, daß diese Kräfte im Äther, der feinen Materie, die alle Körper umgibt, liegen. Bleiben wir bei den Körpern, die wir auf der Erde finden: sie fallen zu Boden, sobald sie nicht mehr untersützt werden. Welches ist die wahre Ursache dieses Fallens? Wie würde nach englischer Ansicht der Körper der Erde in der Entfernung gewahr? wie die Begierde bekommen, sich mit ihr zu vereinigen?

Sobald man annimmt, daß der Raum zwischen den Körpern mit einer feinen Materie angefüllt ist, so sieht man gleich ein, daß diese auf die Körper wirken kann. Dies scheint vernünftiger, wenn man auch die Art dieser Einwirkung nicht genau einsieht, als zu einer ganz unverständlichen qualitas occulta seine Zuflucht zu nehmen. Das heißt in der Tat nichts erklären, oder die Unwissenheit verbergen. Da man heutzutage die qualitates occultas aus der Philosophie verbannt hat, so muß es die newtonische Attraction, in diesem Verstande genommen, auch sein.

Es ist nicht möglich, die Verdienste der großen mathematischen Physiker an dieser Stelle adäquat vorzustellen, als Ersatz diene die folgende

EHRENTAFEL

Isaac NEWTON (1643-1727)
Daniel BERNOULLI (1700-1782)
Leonhard EULER (1707-1783)
Jean Le Rond *d'*ALEMBERT (1717-1783)
Joseph Louis LAGRANGE (1736-1813)
Pierre Simon de LAPLACE (1749-1827)
Adrien Marie LEGENDRE (1752-1833)
Karl Friedrich GAUSS (1777-1855)
Simeon-Denis POISSON (1781-1840)
Carl Gustav Jacob JACOBI (1804-1851)
William Rowan HAMILTON (1805-1865)
Joseph LIOUVILLE (1809-1882)
George Gabriel STOKES (1819-1903)
John William STRUTT (Lord Rayleigh) (1842-1919)
Hermann MINKOWSKI (1864-1909)
Albert EINSTEIN (1879-1955)

1.4 Die Grenzen der Mechanik

Die Grundideen der newtonischen Mechanik bewährten sich auch bei der Beschreibung von Materie, die aus praktisch dicht gepackten Teilchen besteht, und daher als Kontinuum behandelt werden kann. D.BERNOULLI und EULER sind die großen Meister der Hydromechanik, die in der Folge zu einer allgemeinen Kontinuumsmechanik ausgebaut werden konnte, ohne daß wesentlich neue Konzepte notwendig waren.

Am Beginn des 19. Jahrhunderts wurde die Erforschung der elektrischen und magnetischen Kräfte ein zentraler Gegenstand der Physik. Diese Erscheinungen wurden zunächst im Rahmen des mechanistischen Weltbildes untersucht und interpretiert. AMPÉRE und WEBER sind in dieser Richtung am weitesten gelangt.

Es zeigte sich aber immer deutlicher, daß die Konzepte der Mechanik grundsätzlich unzureichend sind. Schließlich brachte FARADAY um 1830 mit dem Konzept der **physikalischen Kraftlinien** (hier **Fotomaterie** genannt) ein völlig neuartiges materielles Element in die Physik. Das radikal Neue besteht darin, daß die Fotomaterie erzeugbar und vernichtbar ist, eine Eigenschaft, die im Rahmen der Mechanik grundsätzlich nicht beschrieben werden kann.

FARADAY meinte mit seinen physikalischen Kraftlinien eine Substanz, etwas real Existierendes, ein neu erkanntes Ding-an-sich, eine neue **Art von Materie**. Dieses designatum, die **Fotomaterie**, ist zu unterscheiden vom mathematischen Konzept, dem designans, das zu ihrer Beschreibung verwendet wird. Das mathematische Konzept, das für die Fotomaterie das Analogon zum Massenpunkt darstellt, nennen wir heute *Maxwell-Feld* oder *elektromagnetisches Feld*.

MAXWELL, HERTZ, LORENTZ und EINSTEIN schufen die mathematische Theorie der Fotomaterie, die sogenannte Klassische Elektrodynamik, die besser als **Elektro-Foto-Dynamik** bezeichnet werden sollte.

Auf der weitgehenden praktischen Beherrschung der mechanischen und der elektromagnetischen Erscheinungen basierte dann der Aufschwung der Technik bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts.

EINSTEINS bahnbrechende Erkenntnisse führten zur **Speziellen Relativitätstheorie** und damit zu einem radikalen Umsturz des gesamten physikalischen Weltbildes.

Die Physik muß nun jeder fundamentalen physikalischen Theorie anstelle des newtonischen Raumes den **minkowskischen Raum** der speziellen Relativitätstheorie zugrundegelegen. Die wesentlichste Konsequenz ist zunächst die Existenz einer endlichen **Obergrenze für Geschwindigkeiten**, mit denen sich physikalische Wirkungen ausbreiten (sie beträgt ca. $3.10^8\ msec^{-1}$). Diese Tatsache hat nun zur Folge, daß der newtonische Begriff der Kraft als eines immateriellen agens, das instantan über beliebige Entfernung wirkt, aufgegeben werden muß. Eine reine Mechanik ist fortan nicht mehr möglich; die Fotomaterie muß als wesentlich nichtmechanische Materieart dazugenommen werden, der insbesondere die Vermittlung der Kraftwirkungen zwischen den Teilchen zuzuschreiben ist.

Die LORENTZische Elektronentheorie war ein erster Versuch der Verschmelzung von Mechanik und Fotodynamik zu einer **Elektro-Foto-Dynamik**. Dabei wird die **Elektromaterie** (Elektronen) als System von einsteinischen Massenpunkten beschrieben, die **Fotomaterie** als Maxwell-Feld. Die Fotomaterie vermittelt einerseits die elektromagnetischen Kraftwirkungen, daneben tritt sie als Strahlung (z. B. Licht) selbständig auf.

Diese Theorie hat zwar gewisse mathematische Probleme, die daher kommen, daß die unphysikalische Annahme von elektrisch geladenen Punkt-Teilchen zu Unendlichkeiten führt (*Ultraviolett-Divergenzen*); trotzdem hatte aber der gesamte Komplex der elektromagnetischen Erscheinungen – abgesehen von den um 1900 neu entdeckten Quanteneffekten – doch eine brauchbare Beschreibung gefunden.

Im Rahmen des neuen, durch die spezielle Relativitätstheorie charakterisierten Erkenntnisstandes stellte sich unabweisbar das Problem, wie die adäquate Theorie der Gravitation formuliert werden kann.

Die newtonische Gravitationstheorie steht ja mit der neuen Zeit-Raum-Struktur nicht im Einklang; insbesonders müssen auch Gravitationswirkungen das Prinzip der universellen Obergrenze für die Ausbreitung physikalischer Wirkungen erfüllen. In Analogie zu den elektromagnetischen Kräften läge es nahe, ein Gravitationsfeld als mathematische Beschreibung einer nichtmechanischen Art von Materie sui generis (**Gravimaterie?**) einzuführen.

Schon Faraday äußerte eine solche Idee, er schrieb:

Es bleibt also nur die Möglichkeit, daß Energie beständig um die Sonne herum im Raum vorhanden ist, ob nun sekundäre Körper anwesend sind, die der Wirkung der Schwerkraft unterliegen, oder nicht. So nicht nur um die Sonne herum, sondern um jedes Teilchen Materie, das überhaupt besteht. Ich glaube, daß es sich bei der Gravitation um Zustände ganz ähnlicher Art handelt, wie sie in Bezug auf Licht und Strahlungserscheinungen in theoretischer Hinsicht schon allgemein anerkannt sind.

Einstein schlug jedoch einen gänzlich anderen Weg ein:

Er vertrat die Ansicht, daß Gravitation nicht durch ein Materie-Feld im minkowskischen Raum beschrieben werden könne. Es solle grundsätzlich keine a priori festgelegte Struktur des Raumes geben, sondern eine **dynamische Raum-Zeit-Geometrie**, die auf der Basis gewisser Feldgleichungen von der Energie-Impuls-Verteilung der Materie abhängt. Lediglich der Unterschied zwischen Raum und Zeit soll a priori festgelegt sein durch die Forderung der lorentzischen Signatur für die Metrik.

Die wesentlichen Ideen dieser, von Einstein **Allgemeine Relativitätstheorie** genannten Theorie der Gravitation möge das folgende Einstein-Zitat zum Ausdruck bringen:

Aus physikalischen Gründen bin ich überzeugt, daß das metrische Feld zugleich das Gravitationsfeld ist. Die (physikalische) Geometrie ist keine isolierte, für sich allein bestimmte mehr; die metrische Struktur des Raumes ist gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie — genau wie Riemann es geahnt hatte

— keine autonome mehr, sondern abhängig von der Verteilung der Materie. Damit ist die Raum-Zeit-Struktur ihrer kausalen Absolutheit entkleidet, und es gibt kein Inertialsystem mehr, das wie ein Gespenst auf alles wirkt, auf das aber die Materie nicht zurückwirkt.

Einstein hat dieses Programm durch Angabe seiner Feldgleichung für die metrischen Felder 1916 mathematisch realisiert und zur experimentellen Prüfung bereitgestellt. Er selbst hat keine letzte Befriedigung an dieser Theorie gefunden, sondern Zeit seines Lebens an ihrer Verbesserung gearbeitet. Für eine Reihe von Physikern ist der Hauptmangel dieser Gravitationstheorie die Unmöglichkeit, eine lokale Energiedichte einzuführen.

Die völlige Andersartigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie zeigt sich besonders deutlich, wenn man versucht, sie mit den allgemeinen Prinzipien der Quantentheorie in Einklang zu bringen. Trotz vieler Versuche ist die Verschmelzung der Gravitation mit der Quantentheorie bis heute eines der fundamentalen ungelösten Problemen der Physik.

Die jedem Menschen vertraute Schwerkraft, die den Physikern am längsten bekannte Kraft in der Natur ist bis heute am wenigsten verstanden.

Die **Quantentheorie** setzt allen klassischen physikalischen Theorien eine radikale Grenze, die von ganz anderer Art ist. Eine grundsätzliche **Unbestimmtheit** der Meßgrößen, die nicht auf Unkenntnis oder Unwissenheit beruht, zwingt zur Aufgabe des, alle klassischen Theorien kennzeichnenden, Determinismus.

Obwohl es gelungen ist, der klassischen Mechanik eine **Quantenmechanik** zur Seite zu stellen, die auch auf der Basis des newtonischen Raumes formuliert ist, und auch mit unveränderlichen Punkt-Teilchen (demokritische Materie) arbeitet, sind selbst in diesem Bereich viele grundsätzliche Fragen der Interpretation bis heute offen und Gegenstand aktueller Forschung.

Die schöpferische Phantasie muß durch die
Erziehung des kritischen Verstandes gehen.

Kapitel 2

Die geometrische Struktur des newtonischen Raumes.

Dieses Kapitel ist wissenschaftlich auf der Höhe der Zeit formuliert. Es ist in dieser Form (mit der mathematischen Bildung im 3. Semester) in einer Einführung nicht zumutbar. Eine elementarisierte Form ist noch in Ausarbeitung.

2.1 Motivierung

Grundlegende Ideen der mechanistischen Naturtheorie wurden von LEUKIPP und DEMOKRIT konzipiert; durch EPIKUR sind sie uns schriftlich überliefert, besonders schön im *Brief an Herodotos*. Das physikalische Forschungsprogramm, das vor ca. 2000 Jahren formuliert wurde, wird am besten als *Mechanischer Atomismus* bezeichnet, es lautet in kürzester Fassung:

Die Welt besteht aus Materie, die sich im leeren Raum bewegt.
Die Materie ist aus unveränderlichen *Atomen* zusammengesetzt.
Alles geschieht nach Notwendigkeit.

Es brauchte ca. 2000 Jahre geistiger Entwicklung, bis dieses Programm mathematisch formuliert werden konnte, und als **Newtonische Mechanik** größte Erfolge in der Naturerklärung zeitigte. Man sieht, daß 4 grundlegende Konzepte eingeführt werden:

1) **Das Leere** (Nichtseiende) - heute als **Raum-Zeit** bezeichnet;
2) **Das Volle** (Seiende) - heute als **Materie** bezeichnet;
3) **Bewegung** der Materie im Raum im Laufe der Zeit;
4) **Notwendigkeit** - heute als **dynamische Gesetze** bezeichnet.

Wir stehen nun vor der Aufgabe, diese Begriffe mathematisch zu fassen und damit die **Grund-Sätze** (Axiome) zu formulieren, die zusammen die physikalische Theorie definieren, die heute als **klassische Mechanik** bezeichnet wird. Diese Grund-Sätze sind nicht aus der Naturbeobachtung deduzierbar, sie sind freie Schöpfungen des wohlausgebildeten menschlichen Geistes. Man kann sie also nur durch didaktisch-motivierende Betrachtungen und Argumente nahelegen. Ihre Setzung (Aufstellung der Naturgesetze) ist ein kreativer Akt des Theoretikers, die als zunächst nicht weiter begründbar angenommen wird; danach wird die Bewährung der angenommen Grund-Gesetze bei allen möglichen Anwendungen geprüft. Zur Anwendung ist es notwendig, die handwerklichen Teile der

Theorie, also die mathematischen Ableitungen von Folgesätzen zu lernen und ausreichend zu beherrschen.

Die motivierenden Betrachtungen werden zunächst zur Definition einer Klasse von Raum-Zeit-Strukturen führen, die wir als **cartanische Räume** [1] bezeichnen. Das wesentlichste Kennzeichen der cartanischen Räume ist die Existenz einer absoluten Gleichzeitigkeit. Der einfachste Fall eines cartanischen Raumes ist der krümmungsfreie cartanische Raum; diesen nennen wir den **newtonischen Raum**, weil er der newtonischen Mechanik zu Grunde liegt.

Ein Körper (isoliertes Stück von Materie) wird in der mechanistischen Naturtheorie als eine Ansammlung von *Atomen* d.h. unteilbaren, unveränderlichen (unerzeugbaren, unvernichtbaren) *Elementarteilchen* vorgestellt. Als mathematisches Bild für ein solches *Atom* erfand Newton das Konzept Massenpunkt. Ein als Massenpunkt (designans) beschriebenes Elementarteilchen (designatum) hat keine räumliche Ausdehnung (Punkt); die Materiemenge, die dem Teilchen zugeordnet wird, wird mathematisch beschrieben durch eine positive Zahl m, die Masse (Einheit kg).

Elementare Erfahrung zeigt uns, daß die instantane Lage eines Punkt-Teilchens im Raum durch 3 Zahlen, die Ortskoordinaten, erfaßt werden kann. Die zeitlich aufeinanderfolgenden Lagen eines Punkt-Teilchens werden also durch eine Linie in einer **4-dimensionalen Zeit-Raum-Mannigfaltigkeit** M beschrieben. Diese Linie heißt Weltlinie des Teilchens.

Die einfachste Annahme über die Topologie der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M besteht darin, M diffeomorph zu R^4 anzunehmen, was den naiven Vorstellungen über die Unbegrenztheit von Raum und Zeit entspricht.

[1] Cartan betrachtete in der Nachfolge von Einstein als 1. diese Struktur, 1924

Zur graphischen Veranschaulichung des bisher Gesagten reduzieren wir den Raum auf nur 2 Dimensionen; dann ergibt sich folgendes Bild (Fig. 3):

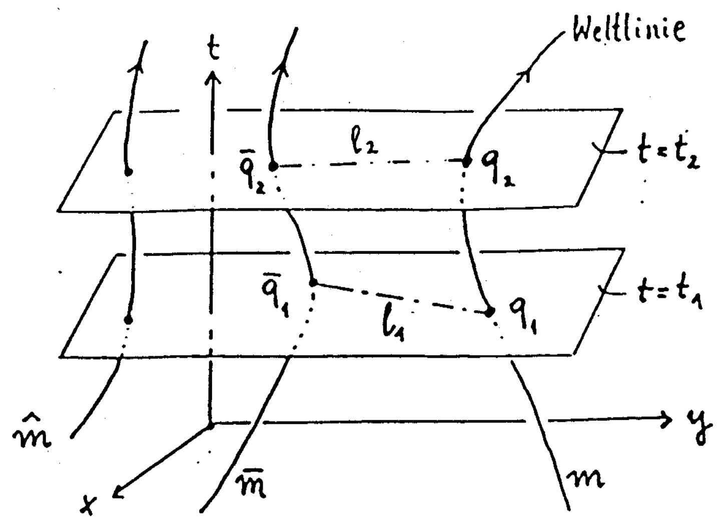


Fig. 3

Eine (in Wirklichkeit 3-dimensionale Hyper-) Ebene $t =$ const. nennen wir einen **instantanen Raum**. q_1 ist der Ort des Massenpunktes m zur Zeit $t = t_1$, q_2 ist der Ort des Massenpunktes m zur Zeit $t = t_2$; analog für andere Massenpunkte. Die **Dauer** der Bewegung von q_1 nach q_2 ist die Zeitdifferenz $t_2 - t_1$. Die 2 Massenpunkte $m, \bar{m}$ haben zur Zeit t_1 den **instantanen Abstand** l_1, zur Zeit t_2 den instantanen Abstand l_2. Ein Körper, der aus N Teilchen besteht, wird durch ein System von N solchen Weltlinien mit Massen $m_1, m_2, ..., m_N$ beschrieben.

Es ist unmittelbar einsichtig, daß auf der Mannigfaltigkeit M bestimmte geometrische Strukturen definiert sein müssen, um die in Fig.3 anschaulich gemachten Sachverhalte kartenfrei ausdrücken zu können. Wir werden zu diesem Zweck insgesamt 4 Strukturelemente einführen, die zusammen eine physikalisch brauchbare Zeit-Raum-Mannigfaltigkeit ergeben, die als cartanischer Raum bezeichnet wird.

2.2 Cartanische Räume

Obwohl der newtonischen Mechanik nur die einfachste Zeit-Raum-Struktur aus der Menge der cartanischen Räume zu Grunde liegt, betrachten wir hier gleich die allgemeine Klasse dieser Räume. In einem cartanischen Raum ist zwar Gleichzeitigkeit absolut definiert, doch kann eine beliebige Krümmung des Raumes vorliegen; es handelt sich also um Analoga zu den einsteinischen

Räumen, d.h. jenen gekrümmtem pseudoriemannischen Räumen mit lorentzischer Signatur, die EINSTEIN seiner Theorie der Gravitation zu Grunde legte (Allgemeine Relativitätstheorie).

Definition einer cartanischen Mannigfaltigkeit (M, Z, h, ∇, E):

M ist eine 4-dimensionale, parallelisierbare, orientierbare Mannigfaltigkeit, die folgende Strukturen tragen kann.

Z ist eine nirgends verschwindende, exakte 1-Form auf M. Wir nennen Z die **Zeit-1-Form**.

h ist eine symmetrische Bilinearform auf den 1-Formen (Kotangentenvektoren) mit den Eigenschaften: $h(A, B) = h(B, A)$;
$h(Z, A) = 0$ für alle 1-Formen A; $sign(h) = (0, +, +, +)$.

∇ ist ein torsionsfreier, vollständiger **Affinzusammenhang**, der mit Z und h verträglich ist.

E ist eine 4-Form auf M, die durch Z und h normiert ist:
$h(u \lrcorner E, v \lrcorner E) = \langle Z, u\rangle.\langle Z, v\rangle.3!$ für alle Vektorfelder u, v.
Wir nennen E die **metrische Orientierungs-Form**.

Die Rolle dieser geometrischen Strukturelemente auf der Mannigfaltigkeit M wird nun eingehend behandelt.

Die Zeit-1-Form Z.

Ein Blick auf die Fig. 3 zeigt, daß für physikalische Zwecke die 4- dimensionale Mannigfaltigkeit M in zeitlich aufeinanderfolgende 3- dimensionale instantane Räume zerlegt werden muß. In cartanischen Räumen wird dazu eine absolute Blätterung von M eingeführt. Zunächst könnte man meinen, daß dies durch eine Funktion $t : M \to \mathbb{R}$ geschehen sollte; $t =$ const. wäre also ein Blatt. Man sieht aber, daß auch die Funktion $\bar{t} := t + a$, wobei a eine beliebige Konstante ist, dieselbe Blätterung liefert. Für die Differentiale gilt jedoch $dt = d\bar{t}$, die Blätterung ist also durch die exakte 1-Form $Z = dt$ definiert. Z ist auf ganz M definiert und verschwindet nirgends, deshalb kann in jedem lokalen Bereich $U \subset M$ als eine der 4 Koordinatenfunktionen die Funktion t gewählt werden.

Mittels Z können bereits 4 für die physikalischen Zwecke grundlegende Begriffe definiert werden:

1. Gleichzeitigkeit (instantane Räume) ;
2. zeitartige und raumartige Tangentenvektoren ;
3. die Geschwindigkeitsvektoren eines Massenpunktes ;
4. die Dauer von Bewegungsabläufen .

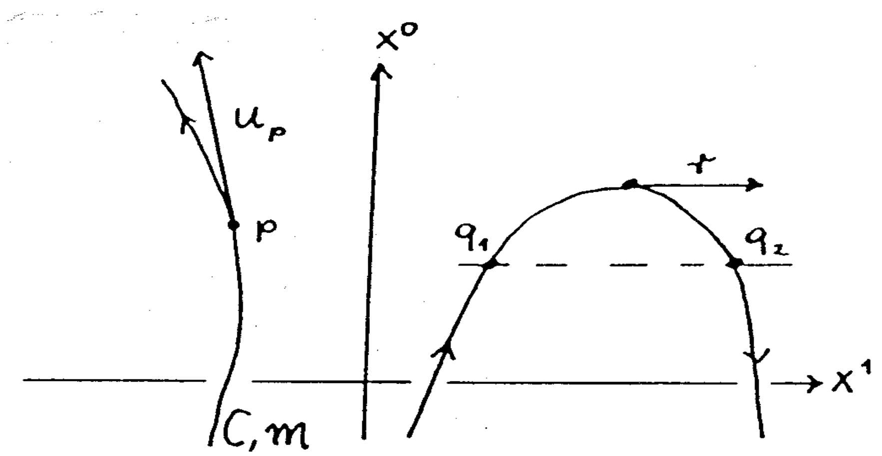
Ad 1.
Da Z exakt ist, gibt es eine Funktion $x^0 : M \to \mathbb{R} : m \mapsto x^0(m)$, so daß $Z = dx^0$. Die Menge der Punkte $m \in M$, für die $x^0(m) = const.$, bilden einen instantanen Raum. Die Funktion x^0 ist nicht eindeutig bestimmt, auch für die Funktionen $x^{\bar{0}} := x^0 + a,\ a \in \mathbb{R}$, gilt $Z = dx^{\bar{0}},\ Z$ zeichnet also keinen instantanen Raum aus.
Ad 2.
Ein Tangentenvektor r mit $\langle Z, r\rangle = 0$ heißt **raumartig**.

Die raumartigen Tangentenvektoren in einem Punkt $m \in M$ bilden einen 3-dimensionalen Untervektorraum $R_m(M) \subset T_m(M)$.

Ein Tangentenvektor u mit $\langle Z, u\rangle \neq 0$ heißt **zeitartig**.
Beachte: Die Menge der zeitartigen Tangentenvektoren in einem Punkt bildet keinen Untervektorraum.

Eine Linie in M, deren Tangentenvektoren überall zeitartig sind, heißt eine **zeitartige Weltlinie**.

Zur Erläuterung diene Fig. 4



Die linke Linie ist zeitartig. Die rechte nicht, da $\langle Z, r\rangle = 0$; eine solche kommt offenbar für die Beschreibung eines Teilchens nicht in Frage, das Teilchen wäre ja zu einer Zeit an 2 Orten q_1, q_2 gleichzeitig. Wenn eine zeitartige Linie ein Teilchen beschreiben soll, das unerzeugbar und unvernichtbar ist, dann darf die Linie keine Enden haben, d.h. sie muß eine vollständige zeitartige Weltlinie sein.

Dies führt nun auf das grundlegende mathematische Konzept der Mechanik, den Massenpunkt:

Definition eines Massenpunktes:

Ein cartanischer Massenpunkt ist ein Paar (m, ZWL), wobei m eine positive Zahl ist, die Masse des Teilchens; ZWL ist eine vollständige zeitartige Weltlinie in einem cartanischen Raum.

Ad 3.
Eine bestimmte Weltlinie kann auf unendlich viele Weisen durch verschiedene Kurven dargestellt werden. Eine bestimmte Kurve $q : \mathbb{R} \to M : s \mapsto q(s)$ liefert zwar in jedem Punkt der Linie einen Tangentenvektor $\dot{q} \in T_{q(s)}$, doch eine andere, äquivalente Kurve q_1 liefert einen anderen Tangentenvektor $\dot{q}_1$. Für eine zeitartige Weltlinie ist aber vermöge Z überall ein eindeutiger Tangentenvektor u definiert, durch $\langle Z, u\rangle = 1$.

Definition eines Geschwindigkeitsvektors:

$$u := \frac{\dot{q}}{\langle Z, \dot{q} \rangle} \tag{2.1}$$

In einer Karte (x^ν) mit dem Rahmen (∂_ν) und dem dualen Korahmen (dx^ν) hat man die Darstellungen:

$$q^\nu(s) := (x^\nu \circ q)(s), \qquad \dot{q} = \dot{q}^\nu(s)(\partial_\nu)_{q(s)} \tag{2.2}$$

$$u = u^\nu(s)(\partial_\nu)_{q(s)}, \qquad u^\nu(s) = \langle dx^\nu, u \rangle \tag{2.3}$$

$$u^\nu(s) = \frac{\dot{q}^\nu(s)}{Z_\sigma \dot{q}^\sigma(s)} \tag{2.4}$$

Man überzeugt sich leicht, daß der Tangentenvektor u nicht von der Kurve abhängt, die zur Darstellung der zeitartigen Weltlinie benützt wird.

Zeitangepaßte Karten

Eine Koordinatenfunktion x^0 mit $Z = dx^0$ kann mit 3 weiteren unabhängigen Koordinatenfunktionen x^1, x^2, x^3 zu einer (lokalen) Karte auf M ergänzt werden. Alle Karten (x^0, x^1, x^2, x^3) mit $Z = dx^0$ nennen wir eine Z-angepaßte Karte auf M.

In einer solchen Karte gilt $\langle Z, \dot{q} \rangle = \dot{q}^0$ und damit $u^0 = 1$. Es sind also nur die Komponenten u^1, u^2, u^3 nötig zur eindeutigen Bestimmung des Geschwindigkeitsvektors u; daher rührt die Sprechweise, daß die Geschwindigkeit ein 3-er Vektor sei.

Sei $(x^{\bar{0}}, x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}})$ eine andere Z-angepaßte Karte, dann hat die Koordinatentransformation die Form:

$$x^{\bar{0}} = x^0 + a, \qquad x^{\bar{k}} = f^{\bar{k}}(x^0, x^i) \tag{2.5}$$

Für die zugehörigen Tangenten- bzw. Kotangenten-Rahmen gelten die Relationen:

$$dx^{\bar{0}} = dx^0, \qquad dx^{\bar{k}} = \frac{\partial f^{\bar{k}}}{\partial x^k}\, dx^k + \frac{\partial f^{\bar{k}}}{\partial x^0}\, dx^0 \tag{2.6}$$

$$\partial_0 = \partial_{\bar{0}} + \frac{\partial f^{\bar{k}}}{\partial x^0}\, \partial_{\bar{k}}, \qquad \partial_k = \frac{\partial f^{\bar{k}}}{\partial x^k}\, \partial_{\bar{k}} \tag{2.7}$$

Man kann selbstverständlich jede beliebige Karte benützen, da alle Konzepte kartenunabhängig definiert sind, doch zur Vereinfachnug der notwendigen Rechnungen empfiehlt sich natürlich die Verwendung Z-angepaßter Karten.

Definition der Dauer:

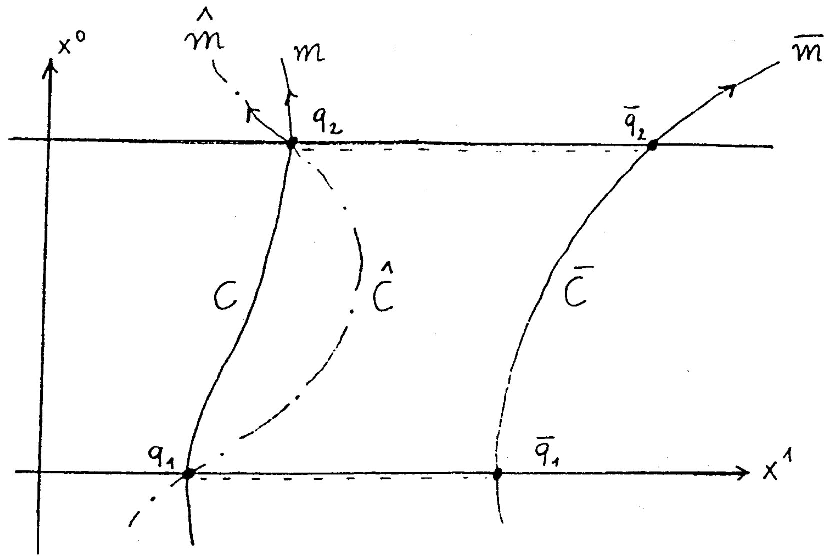
Die Dauer der Bewegung eines Massenpunktes vom Ort q_1 nach dem Ort q_2 ist definiert durch das Wegintegral der 1-Form Z:

$$\tau_{12} := \int_{q_1}^{q_2} Z = \int_{s_1}^{s_2} ds\, \langle Z, \dot{q} \rangle \tag{2.8}$$

In einer Z-angepaßten Karte gilt also

$$\tau_{12} = \int_{s_1}^{s_2} ds\, \dot{q}^0(s) = q^0(s_2) - q^0(s_1) \tag{2.9}$$

Zur Erläuterung diene Fig. 5



Da Z exakt ist hängt τ_{12} nicht von der Linie ab, die q_1 mit q_2 verbindet; die Dauer ist also für die Bewegung längs C und längs $\hat{C}$ gleich (es gibt kein Zwillingsparadoxon). Da überdies auf den strichliert eingezeichneten raumartigen Linien-Teilen $\langle Z, \dot{q} \rangle = 0$ gilt, folgt, daß der Massenpunkt $(\bar{m}, \bar{C})$ von $\bar{q}_1$ nach $\bar{q}_2$ gleich lange braucht wie (m, C) von q_1 nach q_2. Die Punkte $q_1, \bar{q}_1$ sind gleichzeitig, ebenso $q_2, \bar{q}_2$; die Dauer aller Bewegungsabläufe zwischen 2 bestimmten instantanen Räumen ist gleich der Zeitdifferenz $x^0(2) - x^0(1)$.

Die Bilinearform h.

Die Zeit-1-form Z allein als geometrische Struktur auf der Mannigfaltigkeit M reicht zwar hin zur Definition des Konzeptes *Massenpunkt* als eine zeitartige Weltlinie, und man kann auch eine Dynamik solcher Massnpunkte formulieren (Dynamische Systeme), doch für die physikalischen Zwecke der Mechanik braucht man mehr geometrische Struktur. Man benötigt ein Strukturelement, das es ermöglicht, *instantane räumliche Maße* (Längen, Flächen, Volumina) zu definieren. Durch Z ist lediglich das Maß für zeitliche Dauer definiert.

Wir werden nun zeigen, wie durch die Bilinearform h in jedem instantanen Raum eine riemannische Metrik induziert wird, d.h. eine instantane Geometrie.

Da die instantanen Räume durch Z definiert sind, muß zwischen h und Z eine Beziehung bestehen; diese Relation lautet:

$$h(Z, A) = 0 \qquad \text{für alle 1-Formen A} \tag{2.10}$$

In einer Karte (x^ν) mit dem Korahmen (dx^ν) sind die Komponenten von h definiert als

$$h^{\mu\nu} := h(dx^\mu, dx^\nu) = h^{\nu\mu} \tag{2.11}$$

Die obige Relation lautet also für die Komponenten

$$Z_\nu h^{\nu\mu} = 0 \tag{2.12}$$

In einer Z-angepaßten Karte hat man: $Z_0 = 1, Z_k = 0, k = 1, 2, 3$; damit erhält man für die Komponenten von h die Gleichungen

$$h^{0\nu} = h^{\nu 0} = 0 \tag{2.13}$$

Es verbleiben also nur die 6 Funktionen $h^{ik}(x^\nu), i, k = 1, 2, 3$. In einem Punkt $m \in M$ kann durch eine Koordinatentransformation immer erreicht werden, daß (h^{ik}) eine Diagonalmatrix ist. Da die von h induzierte Metrik in den instantanen Räumen positiv definit sein soll, muß man fordern, daß die Signatur von h die Form $sign(h) = (0, +, +, +)$ hat, d.h. daß die 3 Diagonalelemente positiv sind.

Mittels der Strukturelemente Z und h definieren wir nun das Konzept eines *Bezugssystems*.

Definition eines Bezugssystems:

Ein Bezugssystem ist ein globaler Korahmen $(N^a),\ a = 0, 1, 2, 3,$
der die 2 Bedingungen erfüllt:

$$N^0 = Z, \qquad h(N^a, N^b) = \eta^{ab} \tag{2.14}$$

wobei die *Signaturmatrix* η definiert ist durch $\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = 1$, alle übrigen Elemente von η sind null.

Die (N^a) sind also 4 linear unabhängige 1-Formen, die in jedem Punkt $m \in M$ eine Basis des Kotangentialraumes $T^*_m(M)$ definieren. Hier wurde benützt, daß M eine parallelisierbare Mannigfaltigkeit ist. Zum Korahmen (N^a) gehört der eindeutig bestimmte duale Rahmen (n_a)

$$\langle N^a, n_b \rangle = \delta^a{}_b \tag{2.15}$$

Die (n_a) sind 4 linear unabhängige Vektorfelder, die in jedem Punkt $m \in M$ eine Basis des Tangentialraumes $T_m(M)$ definieren.

Seien $(N^a), (N^{\bar{a}})$ 2 Bezugssysteme; aus der Definition eines Bezugssystems folgen unmittelbar die Beziehungen

$$N^a = \gamma^a{}_{\bar{a}}\, N^{\bar{a}}, \qquad n_a = n_{\bar{a}}\, (\gamma^{-1})^{\bar{a}}{}_a \tag{2.16}$$

wobei $\gamma(x)$ eine ortsabhängige (lokale) Galileimatrix ist. Die Galileimatrizen sind definiert durch die Relationen:

$$\gamma^0{}_{\bar{0}} = 1, \qquad \gamma^a{}_{\bar{a}} \gamma^b{}_{\bar{b}} \eta^{\bar{a}\bar{b}} = \eta^{ab} \tag{2.17}$$

d.h. sie haben explizite die Form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ W^1(x) & R^1_{\bar{1}}(x) & R^1_{\bar{2}}(x) & R^1_{\bar{3}}(x) \\ W^2(x) & R^2_{\bar{1}}(x) & R^2_{\bar{2}}(x) & R^2_{\bar{3}}(x) \\ W^3(x) & R^3_{\bar{1}}(x) & R^3_{\bar{2}}(x) & R^3_{\bar{3}}(x) \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

wobei $[R^k_{\bar{k}}(x)]$ eine ortsabhängige orthogonale 3×3 Matrix ist.

Die instantanen Geometrien:

Mittels der Bezugssysteme sind wir nun in der Lage, instantane räumliche Maße zu definieren:

Sei r ein raumartiger Tangentenvektor, d.h. $\langle Z, r\rangle = 0$. Die Komponenten von r relativ zum Bezugssystem (N^a) sind

$$r^k = \langle N^k, r\rangle, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.19}$$

Diese 3 Zahlen hängen zwar vom gewählten Bezugssystem ab; aus den Relationen

$$N^k = R^k{}_{\bar{k}}\, N^{\bar{k}} + W^k\, Z, \qquad \langle Z, r\rangle = 0 \tag{2.20}$$

folgen nun aber die 3 Relationen

$$r^k = R^k{}_{\bar{k}}\, r^{\bar{k}} \tag{2.21}$$

Da R eine orthogonale Matrix ist, folgt daraus die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{3} (r^k)^2 = \sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{3}} (r^{\bar{k}})^2 =: |r|^2 \tag{2.22}$$

Damit ergibt sich die Länge eines raumartigen Tangentenvektors:

Definition der Länge eines raumartigen Tangentenvektors:

$$|r| := \sqrt{|r|^2} \tag{2.23}$$

Aus obigem folgt, daß $|r|$ unabhängig ist von der Wahl des Bezugssystems, relativ zu jedem Bezugssystem denselben Wert hat, also keine relative, sondern eine absolute Größe ist.

Damit läßt sich nun auch jeder raumartigen Linie eine absolute Länge zuordnen:

Sei q eine raumartige Kurve, die die Linie darstellt. Die Tangentenvektoren $\dot{q}$ sind also raumartig, $\langle Z, \dot{q}\rangle = 0$. Die Länge der raumartigen Linie ist definiert als das Linienintegral

$$l_{12} := \int_{s_1}^{s_2} ds \sqrt{\sum_{k=1}^{3} \langle N^k, \dot{q}\rangle^2} \tag{2.24}$$

Die Zahl l_{12} ist unabhängig von der gewählten Kurve, hängt also nur von der Linie ab. Mittels der Länge raumartiger Linien sind auch raumartige Geodäten definiert als die kürzeste Verbindungslinie 2-er gleichzeitiger Punkte.

Die durch Z und h in den instantanen Räumen induzierte Metrik, d.h. Bilinearform auf den raumartigen Tangentenvektoren, bezeichnen wir mit $\bar{G}$. Zwischen je 2 raumartigen Tangentenvektoren r_1, r_2 ist also das absolute Skalarprodukt definiert:

$$\bar{G}(r_1, r_2) := \sum_{k=1}^{3} \langle N^k, r_1 \rangle \, \langle N^k, r_2 \rangle \tag{2.25}$$

$\bar{G}$ definiert in jedem instantanen Raum eine riemannische Geometrie. Damit sind alle physikalisch benötigten instantanen räumlichen Maße: Längen- Winkel- Flächen- und Volumsmaße definiert. Alle diese Maße sind unabhängig vom gewählten Bezugssystem, sie sind also absolute Größen. In einem cartanischen Raum ändert sich die Geometrie der instantanen Räume im Laufe der Zeit, man wäre also in der Lage eine Dynamik der Geometrie (Geometrodynamik) zu entwickeln. Dies ist im wesentlichen die Grundidee von Einsteins Theorie der Gravitation (Allgemeine Relativitätstheorie).

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß in cartanischen Räumen eine 4-dimensionale Geometrie im üblichen Sinne nicht definiert ist; einer zeitartigen Linie ist also keine Länge zugeordnet (keine Eigenzeit).

Definition der Relativgeschwindigkeit:

Ein Geschwindigkeitsvektor u ist ein zeitartiger Tangentenvektor, ein Betrag der Geschwindigkeit kann also nicht ohne Heranziehung eines Bezugssystemes definiert werden; Geschwindigkeiten sind also immer relativ. Zur Definition der Relativgeschwindigkeit muß man also zunächst ein Bezugssystem $(N^a), (n_a)$ wählen. Dann läßt sich der raumartige Tangentenvektor v_n definieren als:

$$v_n := u - n_0, \qquad \langle Z, v_n \rangle = 0 \tag{2.26}$$

Der Betrag der Relativgeschwindigkeit ist nun wohldefiniert als $|v_n|$.

Die Komponenten des Vektors v_n bezüglich der Basis (n_a) ergeben sich einfach als

$$v^k = \langle N^k, v_n \rangle = \langle N^k, u \rangle = u^k, \quad k = 1, 2, 3 \tag{2.27}$$

Man hat also einfach $|v_n|^2 = \sum_{k=1}^{3} (u^k)^2$ zu berechnen.

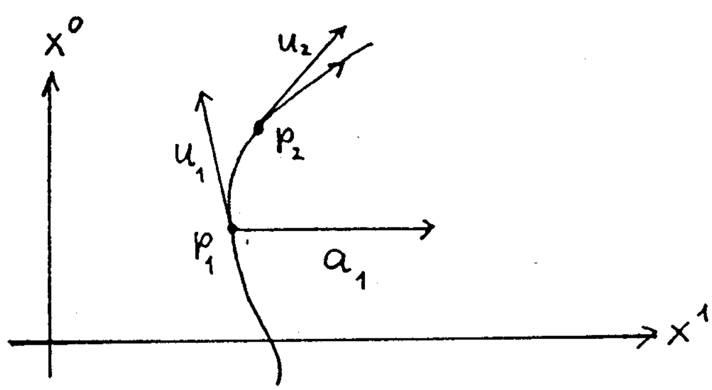
Der Affinzusammenhang ∇.

Nachdem nun alle für die physikalischen Zwecke notwendigen zeitlichen und räumlichen Maße kartenfrei definiert sind, bleibt noch eine wesentliche Aufgabe. Es geht um die zentrale Frage, die Newton und seine Zeitgenossen sehr herausgefordert hat, und deren richtige Beantwortung den Durchbruch der neuzeitlichen Physik bewirkte, um die Frage:

Was ist wahre Bewegung?

Aus dem Geschwindigkeitsvektor u eines Massenpunktes, bzw. dessen Komponenten relativ zu einem Bezugssystem, läßt sich nichts aussagen darüber, ob das Teilchen wahre Bewegung hat oder nicht. Man kann ja, z.B. immer ein Bezugssystem wählen, relativ zu dem die Komponenten von u die Werte $u^0 = 1, u^1 = u^2 = u^3 = 0$ haben, relativ zu dem das Teilchen also ruht. Newton und seinen Zeitgenossen (insbesonders Huygens) war bewußt, daß die Einführung eines ausgezeichneten Bezugssystems (eines absoluten Raumes) den bekannten Tatsachen widerspricht (Relativitätsprinzip). Wie also eine wahre (absolute) Änderung der Bewegung (Geschwindigkeit) definieren, wenn Geschwindigkeiten grundsätzlich relativ sind? Es hat viel Mühe gekostet zu erkennen, daß nicht Geschwindigkeit die Bewegung charakterisiert, sondern **Beschleunigung**. Der mathematische Begriff, der zur wohldefinierten Beschreibung der Änderung der Geschwindigkeit in einem Zeitpunkt, also der Beschleunigung, herangezogen werden muß ist ein Affinzusammenhang (eine kovariante Ableitung). Es geht dabei darum, die Geschwindigkeitsvektoren eines Teilchens in unmittelbar aufeinanderfolgenden Zeitpunkten zu vergleichen, d.h. Tangentenvektoren in verschiedenen Tangentialräumen $T_{q(s)}, T_{q(s+\epsilon)}$, zwischen denen ein Differenzvektor nicht definiert ist. Die Differentiation der Geschwindigkeitsvektoren, die längs der Weltlinie eines Massenpunktes definiert sind, (also zwar kein Vektorfeld bilden, wohl aber eine *Vektorlinie*) geschieht mittels einer kovarianten Ableitung in Richtung des Tangentenvektors an die Weltlinie.

Zur Veranschaulichung diene Fig. 6



Definition eines Beschleunigungsvektors:

$$a := \nabla_u \, u = \frac{\nabla_{\dot{q}} \, u}{\langle Z, \dot{q} \rangle} \tag{2.28}$$

Zur Definition des Beschleunigungsvektors $a \in T_{q(s)}$ wird neben dem Affinzusammenhang ∇ auch die Zeit-1-Form Z gebraucht. Wenn die obige Definition sinnvoll sein soll, darf der Nenner nie null werden, wir werden bald zeigen, daß dies wegen der Verträglichkeit zwischen ∇ und Z garantiert ist.

In einer Karte (x^ν) mit den Rahmen $(\partial_\nu), (dx^\nu)$ hat man die Darstellung

$$a = a^\nu \ (\partial_\nu)_{q(s)}, \qquad a^\nu = \langle dx^\nu, a\rangle \tag{2.29}$$

mit den Komponenten des Beschleunigungsvektors

$$a^\nu = \frac{\dot{u}^\nu + \dot{q}^\sigma \ \nabla^\nu_{\sigma\tau} \ u^\tau}{Z_\rho \dot{q}^\rho} = \frac{\dot{u}^\nu}{Z_\rho \dot{q}^\rho} + \nabla^\nu_{\sigma\tau} \ u^\sigma u^\tau \tag{2.30}$$

Man überzeugt sich leicht, daß der Beschleunigungsvektor a nicht davon abhängt, welche Kurve zur Darstellung der Weltlinie benützt wird.

Ehe wir die Verträglichkeit zwischen ∇ und Z behandeln, soll kurz auf den Begriff einer Geraden eingegangen werden, der durch ∇ allein definiert werden kann.

Definition einer Geraden.

Wenn auf einer Mannigfaltigkeit als einzige geometrische Struktur ein Affinzusammenhang ∇ definiert ist, dann ist damit eine Klassifizierung von Kurven in *Gerade* und *Krumme* definiert.

Eine Kurve $q : \mathbb{R} \to M : \lambda \mapsto q(\lambda)$ ist eine Gerade (bezüglich ∇), wenn sie der Differentialgleichung genügt

$$\nabla_{\dot{q}} \ \dot{q} = \alpha \ \dot{q} \tag{2.31}$$

Durch eine Parametertransformation $\lambda \to s = f(\lambda)$ kann man immer die Form erreichen

$$\nabla_{\dot{q}} \ \dot{q} = 0 \tag{2.32}$$

Eine solche Variable s heißt ein affiner Kurvenparameter; ein solcher ist bis auf Transformationen $\bar{s} = cs + d, \qquad c, d \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

Ein Affinzusammenhang ∇ heißt vollständig, wenn in einem affinen Parameter s der ganze Bereich $-\infty < s < +\infty$ durch die Gerade $q(s)$ in M abgebildet wird.

Man sieht, daß in einem cartanischen Raum mittels ∇ auch raumartige Gerade definiert sind.

Eigenschaften des Affinzusammenhanges

Auf einer Mannigfaltigkeit gibt es unendlich viele mögliche Affinzusammenhänge. Es geht nun darum, allgemeine Bedingungen an die Affinzusammenhänge zu formulieren, damit sie für die hier verfolgten physikalischen Zwecke brauchbar sind. Wir werden 3 allgemeine Forderungen an die Affinzusammenhänge stellen; jene die diese Bedingungen erfüllen nennen wir cartanische Affinzusammenhänge. Die 3 Bedingungen sind:

1) ∇ ist torsionsfrei; 2) ∇ ist mit Z verträglich; 3) ∇ ist mit h verträglich.

1) Der **Torsionstensor** eines Affinzusammenhanges $T(\nabla)$ ist definiert durch

$$\nabla_u \ v - \nabla_v \ u - [u, v] = T(u, v), \qquad \text{für alle Vektorfelder } u, \ v. \tag{2.33}$$

Das Vektorfeld $T(u,v)$ hat in einer Karte die Form: $u^\sigma v^\tau T^\nu_{\sigma\tau}\,\partial_\nu$.

Torsionsfrei heißt ein Affinzusammenhang, wenn der Torsionstensor verschwindet. In einer Karte (x^ν) hat man die Vektorfelder (∂_ν), deren Lie-Klammer identisch null ist; torsionsfrei bedeutet also für die Komponenten des Affinzusammenhanges die Relation

$$\nabla^\mu_{\sigma\nu} = \nabla^\mu_{\nu\sigma} \tag{2.34}$$

d.h. Symmetrie in den unteren Indizes. Von 64 möglichen Komponenten eines allgemeinen Affinzusammenhanges bleiben für torsionsfreie nur 40 Komponenten übrig.

2) **Verträglichkeit von ∇ mit Z:**

Gibt man in einen Punkt $m \in M$ einen Tangentenvektor u_m vor (also einen Punkt im Tangentenbündel $T(M)$), dann ist vermöge ∇ eine eindeutig bestimmte Gerade festgelegt durch die Gleichungen

$$\nabla_{\dot q}\,\dot q = 0, \qquad \dot q_m = u_m \tag{2.35}$$

Ein physikalisch zulässiger Affinzusammenhang muß offenbar die folgende Bedingung erfüllen: Wenn u_m ein zeitartiger Tangentenvektor ist, dann soll die Gerade eine zeitartige Weltlinie liefern. Diese Forderung bedeutet, daß zwischen Z und ∇ eine Beziehung bestehen muß; diese *Verträglichkeits-Relation* lautet

$$\nabla_v\, Z = 0 \quad \text{für alle Vektorfelder } v; \qquad \text{kurz} \quad \nabla\, Z = 0 \tag{2.36}$$

Zum Beweis betrachten wir die Funktion $f(s) := \langle Z, \dot q\rangle$, wobei wir o.B.d.A. $f(0) = 1$ wählen. Unter Verwendung der Gleichung

$$\frac{d}{ds}\,\langle Z, w\rangle = \langle \nabla_{\dot q}\, Z, w\rangle + \langle Z, \nabla_{\dot q}\, w\rangle \tag{2.37}$$

erhält man für die Wahl $w = \dot q$ für den Fall einer Geraden: $\nabla_{\dot q}\dot q = 0$ das Ergebnis $\dot f(s) = 0$, d.h. $f(s) = const. = 1$. q.e.d.

Die Beziehung $\nabla\, Z = 0$ lautet in einer Karte (x^ν)

$$Z_{\nu;\sigma} := Z_{\nu,\sigma} - \nabla^\tau_{\sigma\nu}\, Z_\tau = 0 \tag{2.38}$$

Speziell in einer Z-angepaßten Karte folgt daraus, daß die 10 Funktionen $\nabla^0_{\sigma\nu} = 0$ sind; es verbleiben für die möglichen Affinzusammenhänge also nur mehr noch 30 Komponenten.

Aus der Gleichung $\nabla\, Z = 0$ folgt nun der wichtige Satz:

Beschleunigungsvektoren sind raumartige Tangentenvektoren.

Beweis: Aus $\langle Z, u\rangle = 1$ folgt $\frac{d}{ds}\,\langle Z, u\rangle = 0 = \langle Z, \nabla_{\dot q}\, u\rangle$, also auch $\langle Z, a\rangle = 0$, q.e.d.

In einer Z-angepaßten Karte ist also die Komponente $a^0 = 0$; der Beschleunigungsvektor ist also durch 3 Komponenten festgelegt, daher rührt die übliche Sprechweise vom 3-er Vektor.

Wir fassen das Ergebnis in aller Deutlichkeit zusammen:

> *Da ein Beschleunigungsvektor ein raumartiger Tangentenvektor ist, ist sein Betrag $|a|$ absolut definiert. Wenn $|a| \neq 0$, die Bewegung also beschleunigt ist, sprechen wir mit* Newton *von wahrer Bewegung; ist die Bewegung unbeschleunigt, so sprechen wir von scheinbarer Bewegung. Wahre Bewegung ist also ohne Einführung eines absoluten Raumes (ohne Widerspruch zum Relativitätsprinzip) definiert.*

Es ist hiermit klar, daß Newton recht hatte gegen Huygens.

An dieser Stelle sei nachdrücklich darauf hingewiesen, daß ein im Schwerefeld der Erde fallender Körper (Astronaut) auch relativ zum Bezugssystem der mitfallenden Raumkapsel dieselbe Beschleunigung hat wie relativ zum Bezugssystem Erde.

Analoges gilt für ein Wassermolekül im Rhein: es hat relativ zum nichtinertialen Bezugssystem rotierende Erde dieselbe Beschleunigung wie zum Inertialsystem der Sonne. Die in solchen Fällen üblichen Ausdrücke *Zentrifugalbeschleunigung* und *Coriolisbeschleunigung* sind ein Zeichen des Sprach- u. Denkvervalls, früher nannte man sie Scheinbeschleunigung, denn sie sind etwas anders als die hier definierte newtonische Beschleunigung. Wir werden später die verschiedenen Konzepte von Scheinbeschleunigungen darlegen, die - je nach Bedarf - aus rechentechnischen Gründen definiert werden können.

3) **Die Verträglichkeit von ∇ mit h.**

Als letzte allgemeine Bedingung an den affinen Zusammenhang ∇ stellen wir die Verträglichkeit mit der Bilinearform h; d.h. wir fordern

$$\nabla_v h(A,B) = h(\nabla_v A, B) + h(A, \nabla_v B) \tag{2.39}$$

für alle 1-Formen A, B und alle Vektorfelder v ; kurz geschrieben: $\nabla h = 0$

In einer Karte bedeutet dies das Bestehen der Differentialgleichungen

$$h^{\mu\nu}_{;\sigma} := h^{\mu\nu}_{,\sigma} + \nabla^{\mu}_{\sigma\tau} h^{\tau\nu} + \nabla^{\nu}_{\sigma\tau} h^{\tau\mu} = 0 \tag{2.40}$$

Zusammen mit der Torsionsfreiheit von ∇ folgt daraus, daß für die Geometrien auf den instantanen Räumen $x^0 = const.$ die ∇^k_{rl} gerade die Komponenten des zur räumlichen Metrik gehörigen Christoffel-Zusammenhanges sind. Die raumartigen Geodäten sind also zugleich raumartige Geraden.

Als weitere Konsequenz der Verträglichkeit folgt in einer Z-angepaßten Karte noch die Beziehungen

$$h^{ik}{}_{,0} + \nabla^i_{0l} h^{lk} + \nabla^k_{0l} h^{li} = 0 \tag{2.41}$$

Dies ist eine Aussage über die zeitliche Änderung der aufeinander folgenden Geometrien.

Die Orientierungs-4-Form E

Bei der Definition einer cartanischen Mannigfaltigkeit wurde auch die Orientierbarkeit von M gefordert; es gibt also mindestens eine 4-Form Ω auf M, die nirgends 0 wird. Mit Ω ist auch $\bar{\Omega} := -\Omega$ eine nirgends verschwindende 4-Form, diese definiert die entgegengesetzte Orientierung von M.

Sei eine Orientierungs-4-Form E gegeben; dann hat man in einer Karte die Darstellung

$$E = \frac{1}{4!} E_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \tag{2.42}$$

anders geschrieben:

$$E = P(x^\nu) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \qquad P(x^\nu) \neq 0 \tag{2.43}$$

Rechtshändige und linkshändige Karten:

Eine Karte $(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$, die Z-angepaßt ist $(Z = dx^0)$, und deren räumliche Koordinatenfunktionen x^1, x^2, x^3 zu $P > 0$ führen, nennen wir ein rechtshändiges Koordinatensystem. Die Karte $(x^{\bar\nu})$ mit $x^{\bar 0} = x^0$, $x^{\bar 1} = -x^1$, $x^{\bar 2} = x^2$, $x^{\bar 3} = x^3$, ist dann ein linkshändiges Koordinatensystem.

Die Normierung von E

Mit Hilfe der metrischen Elemente Z und h unterwerfen wir E der Normierungsbedingung

$$\frac{1}{3!} h(u \lrcorner E, v \lrcorner E) = \langle Z, u\rangle \langle Z, v\rangle \quad \text{für alle Vektorfelder } u, v \tag{2.44}$$

In einer Karte heißt das:

$$\frac{1}{3!} E_{\mu\rho\sigma\tau} E_{\nu\alpha\beta\gamma} h^{\rho\alpha} h^{\sigma\beta} h^{\tau\gamma} = Z_\mu Z_\nu \tag{2.45}$$

damit ist der Betrag der Funktion P eindeutig festgelegt. Wir nennen E die metrische Orientierungsform.

Für jedes rechtshändige Bezugssystem gilt $E = N^0 \wedge N^1 \wedge N^2 \wedge N^3$; für linkshändige tritt ein – Zeichen auf. Wir werden stets nach dem üblichen Brauch nur rechtshändige Koordinatensysteme benützen, E_{0123} ist dann immer positiv.

Schließlich sei hier noch erwähnt, daß E durch Dualität das eindeutig bestimmte Quadri-Vektorfeld e definiert: $< E, e) = 1$. Das innere Produkt $Z \lrcorner e$ liefert dann ein eindeutig bestimmtes Tri-Vektorfeld. Man kann auch dieses benützen, um die 3 raumartigen Kobasis-Elemente in rechts- bzw. links- Beine einzuteilen.

Als Beispiel für cartanische Räume betrachten wir die

2-dimensionalen cartanischen Räume:

Die Mannigfaltigkeit M wählen wir diffeomorph zu $\mathbb{R}^2$. In einer Z-angepaßten globalen Karte x^0, x^1 hat man $Z = dx^0$, $h^{00} = h^{01} = h^{10} = 0$, $h^{11} := 1/V^2$, mit einer beliebigen Funktion $V \neq 0$; $E = V\ dx^0 \wedge dx^1$.

Aus $\nabla Z = 0$ folgen für die Zusammenhangsformen die Gleichungen
$\nabla^0_\nu = 0$.

Aus $\nabla h = 0$ und torsionsfreiheit folgen die Gleichungen:

$$\nabla^1_0 = U\ dx^0 + \frac{V_{,0}}{V}\ dx^1 \tag{2.46}$$

$$\nabla_1^1 = \frac{1}{V}\ dV = \frac{1}{V}(V_{,0}\ \ dx^0 + V_{,1}\ \ dx^1) \tag{2.47}$$

Es bleiben also 2 willkürliche Funktionen V, U.

Die Krümmungs-2-Formen $K^\mu_\nu = \frac{1}{2} K^\mu_{\nu\rho\sigma}\ dx^\rho \wedge dx^\sigma$ erhält man als:

$$K^1_0 = \frac{1}{V}(V_{,00} - U.V_{,1} - V.U_{,1})dx^0 \wedge dx^1 = K^1_{001}\ dx^0 \wedge dx^1 \tag{2.48}$$

alle übrigen Komponenten von K sind 0.

Das Ricci-Tensorfeld, $R_{\mu\nu} = K^\sigma_{\mu\sigma\nu}$, ergibt sich daraus als:

$$R_{\mu\nu} = (U_{,1} + \frac{U}{V}.V_{,1} - \frac{V_{,00}}{V})\ Z_\mu Z_\nu \tag{2.49}$$

Durch den folgenden Kartenwechsel (*Schwarzschildkarte*) kann noch die Darstellung $h^{\bar{1}\bar{1}} = 1$ erreicht werden:

$$x^{\bar{0}} = x^0, \quad x^{\bar{1}} = \int_0^{x^1} dz\ V(x^0, z) \tag{2.50}$$

Diese Karte liefert also einen holonomen Normalrahmen: $N^{\bar{0}} = dx^{\bar{0}}$, $N^{\bar{1}} = dx^{\bar{1}}$.

In Analogie zu den Ideen, die EINSTEIN zur Allgemeinen Relativitätstheorie führten, kann man nun versuchen eine Feldgleichung für die geometrischen Felder aufzustellen, die diese in dynamischer Abhängigkeit von der Massendichte ρ der Materie beschreiben. Die Gleichung $R_{\mu\nu} = \gamma.\rho Z_\mu Z_\nu$ z. B. erinnert an die Newtonsche Feldgleichung für das Gravitationsfeld $\Delta\phi = \gamma.\rho$ falls man $V = 1$, $U = \phi_{,1}$ setzt, und damit $R_{oo} = \phi_{,11}$ erhält.

2.3 Der newtonische Zaum

Es gibt viele verschiedene cartanische Mannifgaltigkeiten, da die an h und ∇ gestellten Bedingungen – selbst bei Vorgabe der Topologie von M – viele Möglichkeiten offen lassen; insbesonders kann der Zusammenhang ∇ eine Krümmung besitzen. Die cartanische Raumstruktur ist also ein weiter Rahmen, analog zur pseudo-riemannischen Struktur, die EINSTEINS Allgemeiner Relativitätstheorie zugrunde liegt. Der klassischen Mechanik liegt der einfachste Fall einer cartanischen Mannig- faltigkeit zu Grunde; wir nennen diese Struktur den newtonischen Raum.

Definition des newtonischen Zaumes:

(M, Z, h, ∇, E) ist eine cartanische Mannigfaltigkeit, die den 2 zusätzlichen Bedingungen genügt:

1) M ist diffeomorph zum $\mathbb{R}^4$, 2) ∇ ist krümmungsfrei.

Die Krümmungs-2-Formen K^μ_ν eines Zusammenhanges ∇ sind definiert durch

$$K^\mu_\nu(u, v)\ w^\nu \partial_\mu := \nabla_u \nabla_v\ w - \nabla_v \nabla_u\ w - \nabla_{[u,v]}\ w \tag{2.51}$$

für alle Vektorfelder u, v, w.

Mit den bezüglich einer Karte (x^ν) definierten Zusammenhangs-1-Formen $\nabla^\mu_\nu := \nabla^\mu_{\nu\sigma} dx^\sigma$ ergeben sich dann die Krümmungs-2-Formen

$$K^\mu_\nu = d\nabla^\mu_\nu + \nabla^\mu_\sigma \wedge \nabla^\sigma_\nu \tag{2.52}$$

Die Forderung der Krümmumgsfreiheit $K^\mu_\nu = 0$ führt zu einer großen Vereinfachung. Nach bekannten Sätzen der Differentialgeometrie folgt daraus, daß es auf $M \simeq \mathbb{R}^4$ globale Karten gibt, in denen $\nabla^\mu_{\sigma\nu} = 0$; solche Karten heißen affine Karten. Je 2 solche sind durch eine allgemeine lineare Koordinatentransformation miteinander verknüpft:

$$x^\nu = C^\nu{}_{\bar\nu}\, x^{\bar\nu} + c^\nu, \quad \text{wobei} \quad (C^\nu{}_{\bar\nu}) \in GL(4,\mathbb{R}),\ (c^\nu) \in \mathbb{R}^4 \tag{2.53}$$

Es gibt also eine 20-dimensionale Menge affiner Karten.

Galileische Karten

Unter den affinen Karten gibt es solche, die an Z und h angepaßt sind. In einer affinen Karte sind die Komponenten Z_ν , $h^{\mu\nu}$ Konstanten. Es gibt also auch Karten (x^a) $a = 0,1,2,3$, in denen

$$\nabla^a_{bc} = 0, \quad Z = dx^0, \quad h^{ab} = \eta^{ab}, \quad E = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{2.54}$$

Diese Karten heißen **galileische Karten;** sie sind der Struktur des newtonischen Raumes optimal angepaßt.

Je 2 galileische Karten sind durch eine **Galileitransformation** miteinander verknüpft:

$$x^a = \gamma^a{}_{\bar a}\, x^{\bar a} + c^a, \quad \text{wobei} \quad (c^a) \in \mathbb{R}^4,\ (\gamma^a{}_{\bar a}) \text{ Galileimatrix} \tag{2.55}$$

Die Galileimatrizen bilden eine 6-dimensionale Lie-Gruppe. Insgesamt gibt es also eine 10-dimensionale Menge galileischer Karten.

Galileische Koordinaten haben eine unmittelbare metrische Bedeutung. Man sieht sogleich, daß die vier 1-Formen $I^a := dx^a$ ein Bezugssystem bilden. Daraus folgt, daß in allen instantanen Räumen dieselbe euklidische Geometrie herrscht. Der Abstand von 2 gleichzeitigen Punkten m_1, m_2 ergibt sich direkt als

$$l_{12} = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} (x^k(m_2) - x^k(m_1))^2} \tag{2.56}$$

entsprechend dem pythagoräischen Satz.

Inertialsysteme und Killing-1-Formen

Die galileischen Karten spielen eine ausgezeichnete Rolle. Wir haben gesehen, daß sie der Raum-Zeit-Struktur optimal angepaßt sind; dies hat zunächst den Bequemlichkeitsvorteil, daß alle Rechnungen damit die einfachste Form annehmen. Der wesentliche Punkt besteht aber darin, daß der von einer galileischen Karte erzeugte Normalrahmen $I^a := dx^a$ ein sogenanntes Inertialsystem definiert.

Die Eigenschaft von ∇, krümmungsfrei zu sein, hat die Existenz ausgezeichneter 1-Formen zur Folge; insgesamt gibt es 10 solcher 1-Formen, sie werden Killing-Formen genannt. Die Killing-Formen werden bei der Formulierung des Relativitätsprinzips und der damit verbundenen allgemeinen Erhaltungssätze eine wichtige Rolle spielen.

Man sieht unmittelbar, daß eine galileische Karte (x^a) ein Bezugssystem definiert:

$$I^a := dx^a, \qquad i_a := \partial_a \tag{2.57}$$

Diese Bezugssysteme sind ausgezeichnet durch die Eigenschaft fernparallel zu sein, d. h. sie genügen den Gleichungen

$$\nabla I^a = 0, \qquad \nabla i_a = 0 \tag{2.58}$$

sie werden deshalb inertiale Bezugssysteme oder kurz **Inertialsysteme** genannt. In einer allgemeinen Karte (x^ν) hat man $I^a = I^a_\nu dx^\nu$, die Gleichungen (2.58) haben also die Form

$$I^a_{\mu;\nu} = 0 \tag{2.59}$$

Je 2 Inertialsysteme (I^a), $(I^{\bar{a}})$ sind mittels einer (globalen) Galileimatrix in Beziehung: $I^a = \gamma^a{}_{\bar{a}}\, I^{\bar{a}}$. Für die dualen inertialen Tangentenbasen (i_a), $(i_{\bar{a}})$ gilt $i_a = i_{\bar{a}}\, (\gamma^{-1})^{\bar{a}}{}_a$.

Zusätzlich zu den vier 1-Formen (I^a) definiert eine galileische Karte auch die folgenden sechs 1-Formen:

$$K^{ab} := x^a dx^b - x^b dx^a = -K^{ba} \tag{2.60}$$

Diese sind zwar nicht kovariant konstant, d. h. $\nabla K^{ab} \neq 0$, doch sind sie durch folgende Eigenschaft ausgezeichnet:

$$< \nabla_u K, v) + < \nabla_v K, u) = 0 \qquad \text{für alle Vektorfelder } u, v \tag{2.61}$$

Eine 1-Form mit dieser Eigenschaft heißt **Killing-1-Form zu** ∇. In einer Karte (x^ν) hat man $K = K_\nu dx^\nu$, es gelten für die Komponenten einer Killing-Form also die Gleichungen

$$K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} = 0 \tag{2.62}$$

Auch die I^a erfüllen diese Gleichungen; der newtonische Zusammenhang ∇ besitzt also insgesamt 10 unabhängige Killing-Formen. Dies ist die maximal mögliche Anzahl in einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

Wir werden später die wichtige Rolle kennenlernen, welche die 10 Killing-Formen für die Formulierung der 10 fundamentalen Erhaltungssätze von Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunkt spielen. [2]

Für den Übergang von einer galileischen Karte zu einer anderen gelten für die Killing-Formen K^{ab} die Beziehungen

$$K^{ab} = \gamma^a{}_{\bar{a}} \gamma^b{}_{\bar{b}}\, K^{\bar{a}\bar{b}} + (c^a \gamma^b{}_{\bar{b}} - c^b \gamma^a{}_{\bar{a}}) I^{\bar{a}} \tag{2.63}$$

Es werden also die I^a beigemischt.

[2] Das Fehlen von Killing-Formen in der Allgemeinen Relativitätstheorie ist ein Grund für die dort bestehenden grundsätzlichen Probleme im Hinblick auf Erhaltungssätze.

Die Isometriegruppe des newtonischen Zaumes

Wir betrachten Abbildungen der Zeit-Raum-Mannigfaltigkeit auf sich. Ein Diffeomorphismus

$$\phi : M \to M : m \mapsto \phi(m) \tag{2.64}$$

hat in einer globalen Karte (x^a) die Darstellung $\phi^a(x^b) := x^a \circ \phi$. Ein Diffeomorphismus ϕ liefert nicht nur eine Abbildung der Punkte von M auf Punkte von M, und damit aller geometrischen Gebilde wie der Linien, Flächen Volumina etc.; ϕ induziert auch Abbildungen von Feldern aller Art, die auf M definiert sind, in entsprechende Bild-Felder. So wird $z.B.$ einem Vektorfeld v mittels der Tangentialabbildung $T\phi$

$$T\phi : T_m(M) \to T_{\phi(m)}(M) \tag{2.65}$$

ein Bild-Vektorfeld $\phi^*(v)$ zugeordnet. Wir bezeichnen die induzierten Abbildungen der Felder allgemein mit ϕ^*. Die Elemente Z, h, ∇, gehen unter ϕ also über in $\phi^*(Z), \quad \phi^*(h), \quad \phi^*(\nabla)$.

Die Menge aller Diffeomorphismen, die die Bedingungen erfüllen:

$$\phi^*(Z) = Z, \quad \phi^*(h) = h, \quad \phi^*(\nabla) = \nabla \tag{2.66}$$

bilden die **Isometriegruppe des newtonischen Raumes.**

Es gilt der Satz:

Die Isometriegruppe des newtonischen Raumes ist eine 10 dimensionale Lie-Gruppe, die isomorph ist zur inhomogenen Galileigruppe.
Die Abbildungen sind Flußabbildungen, die von 10 Vektorfeldern erzeugt werden.

In einer galileischen Karte (x^a) hat man für die Isometrieabbildungen die explizite Form

$$\phi^a(x^b) = \gamma^a{}_b x^b + c^a, \quad \text{wobei} \quad (\gamma^a{}_b) \text{ Galileimatrix}, \; (c^a) \in \mathbb{R}^4 \tag{2.67}$$

Man beachte, daß die Galileigruppe hier eine begrifflich gänzlich andere Rolle spielt (aktive Rolle), als die (nur passive) Rolle eines Kartenwechsels. Als Koordinatentransformation (Kartenwechsel) könnte die Galileigruppe $z.B.$ auch in der speziellen Relativitätstheorie benützt werden. Die Galilei-Symmetrie (Isometrie) ist jedoch eine spezielle Eigenschaft der Struktur (Geometrie) des newtonischen Raumes. Diese ist allerdings der Grund für die Existenz galileischer Karten mit den oben dargelegten Eigenschaften.

Die kontinuierlich mit der Identität zusammenhängenden galileischen Symmetrieabbildungen sind Flußabbildungen, die durch 10 Vektorfelder erzeugt werden, entsprechend der Dimension der inhomogenen Galileigruppe. Die Darstellungen der erzeugenden Vektorfelder auf einer galileischen Karte sind aus (2.67) sofort abzulesen, man braucht ja nur in der Nähe der Identität zu entwickeln:

Die **Translationen**: $\gamma^a{}_b = \delta^a{}_b$, c^0, c^1, c^2, c^3 beliebig, werden erzeugt von den 4 Vektorfeldern

$$i_a = \partial_a, \quad a = 0, 1, 2, 3 \tag{2.68}$$

Die Vektorfelder zu den homogenen Galilei-Abbildungen lassen sich kompakt schreiben als $\gamma = exp(\theta_{rs}\lambda^{rs})$ mittels der Lie-Algebra-Matrizen

$$(\lambda^{rs})^a{}_b := \eta^{as}\delta^r{}_b - \eta^{ar}\delta^s{}_b \tag{2.69}$$

Die Matrix λ^{12} erzeugt die Drehungen in der 12-Ebene, etc.; die Matrix λ^{01} erzeugt die Transvelozitationen in 1-Richtung, etcetera.

Die erzeugenden Vektorfelder ergeben sich damit als

$$l^{rs} = (\lambda^{rs})^a{}_b x^b \, \partial_a \tag{2.70}$$

Aus den Vertauschungsrelationen der Matrizen λ^{rs}

$$[\lambda^{rs}, \lambda^{tu}] = \eta^{rt}\lambda^{su} - \eta^{ru}\lambda^{st} + \eta^{su}\lambda^{rt} - \eta^{st}\lambda^{ru} \tag{2.71}$$

ergeben sich unmittelbar die Lie-Produkte der entsprechenden Vektorfelder:

$$-[l^{rs}, l^{tu}] = \eta^{rt}\, l^{su} - \eta^{ru}\, l^{st} + \eta^{su}\, l^{rt} - \eta^{st}\, l^{ru} \tag{2.72}$$

Explizite erhält man:

Die **Drehungen**: $\gamma^a{}_b = R^a{}_b$, $c^a = 0$, werden erzeugt von den 3 Vektorfeldern

$$l_3 := l^{12} = -x^2\partial_1 + x^1\partial_2, \qquad \text{zyklisch in 1,2,3} \tag{2.73}$$

Die **Transvelozitationen** (boost): $c^a = 0$, $\gamma^0{}_i = w^i$, $R =$ Einheitsmatrix, werden erzeugt von den 3 Vektorfeldern

$$k_i := l^{0i} = x^0\partial_i \ , \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.74}$$

Die Lie-Algebra aller 10 Vektorfelder lautet explizite:

$$[l_1, i_2] = -i_3, \quad [l_1, l_2] = -l_3, \quad [l_1, k_2] = -k_3, \quad \text{zyklisch} \tag{2.75}$$

$$[k_i, i_0] = -i_i, \quad \text{alle übrigen Lie-Klammern} = 0. \tag{2.76}$$

Die Tatsache, daß jedes dieser 10 Vektorfelder eine Isometrieabbildung des newtonischen Raumes erzeugt, läßt sich mit der jeweiligen Lie-Ableitung L_v auf folgende Weise ausdrücken:

$$L_v Z = 0, \quad \text{d. h.} \quad v^c Z_{a},_c + Z_c v^c,_a = 0 \tag{2.77}$$

$$L_v h = 0, \quad \text{d. h.} \quad v^c h^{ab},_c - h^{cb} v^a,_c - h^{ac} v^b,_c = 0 \tag{2.78}$$

$$L_v \nabla = 0, \; v^r \nabla^a_{cb,r} - \nabla^r_{cb}\; v^a,_r + \nabla^a_{rb}\; v^r,_c + \nabla^a_{cr}\; v^r,_b + v^a,_{cb} = 0 \tag{2.79}$$

für $v = i_a$, l_j , k_i .

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß die Vektorfelder i_j , l_j , k_j aus den Killing-Formen abgeleitet werden können mittels der durch h definierten $\underline{\sharp}$ – Abbildung gemäß:

$$l_3 = K^{12}_\mu h^{\mu\nu}\, \partial_\nu, \qquad k_i = K^{0i}_\mu h^{\mu\nu}\, \partial_\nu \qquad \text{etc.} \tag{2.80}$$

Da aber h eine ausgeartete Bilinearform ist, ist $\underline{\sharp}$ kein Isomorphismus, *d.h.*, die Umkehrungen dieser Beziehungen sind nicht möglich.

2.4 Nichtinertiale Bezugssysteme

Ein allgemeines Bezugssystem ist definiert durch einen gegebenen normierten Ko-Rahmen (N^a) ; dieser liefert den dualen Rahmen (n_a) . Falls $\nabla N^a \neq 0$, heißt (N^a) ein nichtinertiales Bezugssystem. Wir behandeln hier 2 Beispiele für nichtinertiale Bezugssysteme explizite: ein geradlinig beschleunigtes Bezugssystem (*z.B.* ein in einem homogenen Schwerefeld frei fallendes Labor), und ein rotierendes Bezugssystem (*z.B.* die Erde als Bezugssystem).

Geradlinig beschleunigte Bezugssysteme

Sei x^0, x^1, x^2, x^3 ein galileisches Koordinatensystem; ein in 1-Richtung beschleunigtes System wird geliefert von den nichtgalileischen Koordinatenfunktionen $x^{\bar{0}}$, $x^{\bar{1}}$, $x^{\bar{2}}$, $x^{\bar{3}}$, definiert durch die Koordinatentransformation

$$x^{\bar{0}} = x^0, \qquad x^{\bar{1}} = x^1 - f(x^0), \qquad x^{\bar{2}} = x^2, \qquad x^{\bar{3}} = x^3 \tag{2.81}$$

mit der Umkehrtransformation

$$x^0 = x^{\bar{0}}, \qquad x^1 = x^{\bar{1}} + f(x^{\bar{0}}), \qquad x^2 = x^{\bar{2}}, \qquad x^3 = x^{\bar{3}} \tag{2.82}$$

Aus den Definitionen

$$N^{\bar{0}} := dx^{\bar{0}} = dx^0 = Z, \qquad N^{\bar{1}} := dx^{\bar{1}} = dx^1 - \dot{f}(x^0)\ dx^0 \tag{2.83}$$

$$N^{\bar{2}} := dx^{\bar{2}} = dx^2 = I^2, \qquad N^{\bar{3}} := dx^{\bar{3}} = dx^3 = I^3 \tag{2.84}$$

folgt unmittelbar, daß der (holonome) Ko-Rahmen $(N^{\bar{a}})$ bei einer beliebigen Funktion $f(x^0)$ ein Bezugssystem ist. Die 2 Bezugssysteme (I^a), $(N^{\bar{a}})$ sind durch die lokale Galileimatrix $({\gamma^a}_{\bar{a}})$ gem. (2.18) miteinander verknüpft, wobei $W^1 = \dot{f}(x^0)$, $W^2 = W^3 = 0$, $R =$ Einheitsmatrix.

Die Komponenten des affinen Zusammenhangs in der Karte $(x^{\bar{a}})$ ergeben sich aus der Gleichung

$$\nabla^{\bar{a}}_{\bar{b}} = {(\gamma^{-1})^{\bar{a}}}_b\ d{\gamma^b}_{\bar{b}} \qquad \text{explizite als} \tag{2.85}$$

$$\nabla^{\bar{1}}_{\bar{0}\bar{0}} = \ddot{f}(x^{\bar{0}}), \qquad \text{alle übrigen} = 0 \tag{2.86}$$

Wir betrachten nun die Beschreibung eines Massenpunktes relativ zu beiden Bezugssystemen:

Aus $q^{\bar{a}}(s) = x^{\bar{a}} \circ q$, $q^a(s) = x^a \circ q$ folgen für die Ortskoordinaten die Beziehungen

$$q^{\bar{0}}(s) = q^0(s) = s, \qquad q^{\bar{1}}(s) = q^1(s) - f(s) \tag{2.87}$$

$$q^{\bar{2}}(s) = q^2(s), \qquad q^{\bar{3}}(s) = q^3(s) \tag{2.88}$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten $u^a = \dot{q}^a$, $u^{\bar{a}} = \dot{q}^{\bar{a}}$, gelten die Beziehungen

$$u^{\bar{0}} = u^0 = 1, \quad u^{\bar{1}}(s) = u^1(s) - \dot{f}(s), \quad u^{\bar{2}} = u^2,\ u^{\bar{3}} = u^3 \tag{2.89}$$

Für die Beschleunigungskomponenten folgen aus

$$a^a = \ddot{q}^a, \qquad a^{\bar{a}} = \ddot{q}^{\bar{a}} + \nabla^{\bar{a}}_{\bar{0}\bar{0}} \tag{2.90}$$

die Beziehungen

$$a^{\bar{0}} = a^0 = 0, \quad a^{\bar{1}} = \ddot{q}^{\bar{1}} + \ddot{f}(s) = \ddot{q}^1 = a^1 \quad a^{\bar{2}} = a^2,\ a^{\bar{3}} = a^3 \tag{2.91}$$

Man bestätigt daraus direkt, daß der Betrag der Beschleunigung relativ zu beiden Bezugssystemen denselben Wert hat.

Rotierende Bezugssysteme

Ein rotierendes Bezugssystem liefern die nichtgalileischen Koordinatenfunktionen $(x^{\bar{a}})$, die definiert sind durch die Koordinatentransformation

$$x^0 = x^{\bar{0}}, \qquad x^k = R^k{}_{\bar{k}}(x^{\bar{0}})\ x^{\bar{k}} \tag{2.92}$$

Zwischen dem Inertialsystem $I^a := dx^a$ und dem nichtinertialen Bezugssystem $N^{\bar{a}} := dx^{\bar{a}}$ besteht die Beziehung $I^a = \gamma^a{}_{\bar{a}}\ N^{\bar{a}}$, wobei in der lokalen Galileimatrix gem. (2.18) $W^k = \dot{R}^k{}_{\bar{k}}(x^0)\ x^{\bar{k}}$.

Für die Komponenten der Zusammenhangs-Formen ergeben sich die Ausdrücke

$$\nabla^{\bar{k}}_{\bar{0}} = (R^{-1})^{\bar{k}}{}_k\ dW^k = (R^{-1})^{\bar{k}}{}_i \ddot{R}^i{}_{\bar{j}}\ x^{\bar{j}}\ dx^{\bar{0}} + (R^{-1})^{\bar{k}}{}_i \dot{R}^i{}_{\bar{j}}\ dx^{\bar{j}} \tag{2.93}$$

$$\nabla^{\bar{k}}_{\bar{l}} = (R^{-1})^{\bar{k}}{}_k\ dR^k{}_{\bar{l}} = (R^{-1})^{\bar{k}}{}_k\ \dot{R}^k{}_{\bar{l}}\ dx^{\bar{0}} \tag{2.94}$$

Wir betrachten nun den speziellen Fall eines um die x^3 - Achse rotierenden Bezugssystems explizite:

Aus $R = exp\{\alpha(x^0)\ \lambda^{12}\}$ folgen die Gleichungen

$$R^{-1}\dot{R} = \dot{\alpha}(x^0)\ \lambda^{12}, \qquad R^{-1}\ddot{R} = \ddot{\alpha}\ \lambda^{12} + (\dot{\alpha})^2\ (\lambda^{12})^2 \tag{2.95}$$

und daraus die Komponenten des Zusammenhanges

$$\nabla^{\bar{1}}_{\bar{0}\bar{0}} = -\ddot{\alpha}\ x^{\bar{2}} - (\dot{\alpha})^2\ x^{\bar{1}}, \qquad \nabla^{\bar{1}}_{\bar{0}\bar{2}} = -\dot{\alpha} \tag{2.96}$$

$$\nabla^{\bar{2}}_{\bar{0}\bar{0}} = \ddot{\alpha}\ x^{\bar{1}} - (\dot{\alpha})^2\ x^{\bar{2}}, \qquad \nabla^{\bar{2}}_{\bar{0}\bar{1}} = \dot{\alpha} \tag{2.97}$$

alle übrigen unabhängigen Komponenten sind 0.

Für die Ortskoordinaten eines Massenpunktes gelten die Gleichugen

$$q^0(s) = q^{\bar{0}}(s) = s, \qquad q^1(s) = q^{\bar{1}}(s)\ \cos\alpha - q^{\bar{2}}(s)\ \sin\alpha \tag{2.98}$$

$$q^3(s) = q^{\bar{3}}(s), \qquad q^2 = q^{\bar{1}}(s)\ \sin\alpha + q^{\bar{2}}(s)\ \cos\alpha \tag{2.99}$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten gelten die Relationen

$$u^0 = u^{\bar{0}} = 1,\ u^1 = u^{\bar{1}}\ \cos\alpha - u^{\bar{2}}\ \sin\alpha - \dot{\alpha}\ [q^{\bar{1}}\ \sin\alpha + q^{\bar{2}}\ \cos\alpha] \tag{2.100}$$

$$u^3 = u^{\bar{3}}, \qquad u^2 = u^{\bar{1}}\ \sin\alpha + u^{\bar{2}}\ \cos\alpha + \dot{\alpha}\ [q^{\bar{1}}\ \cos\alpha - q^{\bar{2}}\ \sin\alpha] \tag{2.101}$$

Die Beziehungen für die Beschleunigungskomponenten lauten

$$a^{\bar{0}} = a^0 = 0, \qquad a^{\bar{1}} = \dot{u}^{\bar{1}} - [\ddot{\alpha} q^{\bar{2}} + (\dot{\alpha})^2 q^{\bar{1}}] - 2\dot{\alpha} u^{\bar{2}} \tag{2.102}$$

$$a^{\bar{3}} = a^3 = \ddot{q}^3, \qquad a^{\bar{2}} = \dot{u}^{\bar{2}} + [\ddot{\alpha} q^{\bar{1}} - (\dot{\alpha})^2 q^{\bar{2}}] + 2\dot{\alpha} u^{\bar{1}} \tag{2.103}$$

In einer Kurzschreibweise werden diese Gleichungen oft geschrieben als:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{q}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{q} \tag{2.104}$$

der zweite Term wird als *Zentripetalterm* bezeichnet, der dritte als *Coriolisterm*.

Speziell für den Fall einer Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\alpha(x^0) = \omega\ x^0$, also $\dot{\alpha} = \omega$, $\ddot{\alpha} = 0$, hat man die Beziehungen

$$a^{\bar{1}} = \dot{u}^{\bar{1}} - \omega^2\ q^{\bar{1}} - 2\omega\ u^{\bar{2}}, \qquad a^{\bar{2}} = \dot{u}^{\bar{2}} - \omega^2\ q^{\bar{2}} + 2\omega\ u^{\bar{1}} \tag{2.105}$$

Als Beispiel betrachten wir einen Massenpunkt, dessen Ortskoordinaten relativ zum rotierenden System konstant sind:
$q^{\bar{0}} = s, \quad q^{\bar{1}} = R, \quad q^{\bar{2}} = 0, \quad q^{\bar{3}} = b.$
Die Geschwindigkeitskomponenten folgen daraus als: $u^{\bar{0}} = 1,$
$u^{\bar{1}} = u^{\bar{2}} = u^{\bar{3}} = 0.$
Die Beschleunigungskomponenten folgen daraus als $a^{\bar{0}} = 0,$
$a^{\bar{1}} = -\omega^2 R, \quad a^{\bar{2}} = a^{\bar{3}} = 0.$
Der Betrag der Beschleunigung ist also $|a| = \omega^2 R$.

Der Glaube, daß alles Wissen aus der Erfahrung abstrahiert werden kann, ist im Widerspruch zur Logik. K.Popper

Kapitel 3

Die mechanistische Beschreibung der Materie

3.1 Die Grundgesetze der Mechanik

Mit den bisher dargestellten Ideen und mathematischen Begriffen sind wir nun in der Lage, die Grundgesetze (Axiome) der newtonischen Mechanik zu formulieren:

Das I. Axiom bezieht sich auf die Geometrie von Zeit und Raum:

I. Grundgesetz
Die physikalische Zeit-Raum Mannigfaltigkeit ist mathematisch zu beschreiben als der 4 dimensionale newtonische Zaum (M, Z, h, ∇, E).

Das II. Axiom legt fest, wie die Materie mathematisch beschrieben wird:

II. Grundgesetz
Jedes materielle System ist als ein Aggregat von Teilchen zu beschreiben; jedes Teilchen ist mathematisch als newtonischer Massenpunkt (ZWL, m) zu beschreiben.

Das III. Axiom definiert den allgemeinen Rahmen für mögliche Gesetze der Bewegung. Die zentrale Idee Newtons, die er als lex secunda formulierte, besteht darin, zu jeder Zeit den Beschleunigungsvektor a des Teilchens (dessen Betrag ja eine absolute Größe ist) mit der Gesamtheit aller Einwirkungen auf das Teilchen zu dieser Zeit in Beziehung zu setzen. Die Gesamtheit aller instantanen Einwirkungen auf das Teilchen wird durch einen raumartigen Tangentenvektor f am Ort des Massenpunktes – die instantane **Kraft** – erfaßt. Die Teilchen sind nicht nur materielle Klümpchen, sie wirken auch aufeinander ein; diese Einwirkungen werden durch den mathematischen Begriff Kraftvektor erfaßt. Die Kraft auf ein Teilchen wird beliebig klein, wenn alle anderen Teilchen genügend weit entfernt sind; in diesem Fall ist die Weltlinie des (isolierten) Teilchens eine Gerade zu ∇ (Trägheitsbewegung $a = 0$). Falls auf ein Teilchen eine Kraft wirkt, besteht zu jeder Zeit zwischen dem Beschleunigungsvektor a und dem Kraftvektor f die Beziehung:

III. Grundgesetz (allgemeine Bewegungsgleichung)

Das Produkt aus der Masse m und dem Beschleunigungsvektor a eines Massenpunktes ist zu jeder Zeit gleich dem Vektor f der einwirkenden Kraft: $m\ a = f$

Das Bewegungsgesetz sagt in dieser allgemeinen Form nichts darüber aus, welcher Tangentenvektor für f zu nehmen ist. Es bleibt einerseits die zentrale Aufgabe experimenteller Naturforschung, die in der Natur wirkenden Kräfte zu erforschen; andererseits hat die Theorie die Aufgabe, die mathematischen Möglichkeiten für die Beschreibung von Kräften umfassend anzugeben. Dieser Problemkreis wird als Kraftlehre oder **Dynamik** bezeichnet.

Verhältnismäßig einfach ist die mathematische Beschreibung von sogenannten **äußeren Kräften**, die wir auch **Einwirkungen** nennen; diese geschieht durch entsprechende **Felder**. Die in der Praxis auftretenden Einwirkungsfelder sind entweder ein **Skalarfeld** (Gravitation) oder ein **Vektorfeld** (Elektromagnetismus) oder ein **Tensorfeld** (verfeinerte Gravitation) auf der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit M.

Mehr mathematischen Aufwand erfordert die, im Sinne der Mechanik vollständige Beschreibung von materiellen Systemen durch eine **Wechselwirkung** zwischen den Teilchen. NEWTON machte mit seiner lex tertia: **Actio par est reactioni.** eine grundlegende allgemeine Aussage über Wechselwirkungskräfte. Dieses Gesetz soll hier mathematisch genau formuliert werden; wir werden es später aber auch noch als Teil des allgemeineren **galileischen Relativitätsprinzips** kennenlernen. Wir greifen 2 bestimmte Massenpunkte, Nr. α und Nr. β des Systems heraus; dann lautet das

IV. Grundgesetz (allgemeines Wechselwirkungsgesetz)
Zu jeder Zeit sind die Komponenten des Kraftvektors f_α in Bezug auf ein Inertialsystem $\{I^a\}$ negativ gleich den Komponenten des Kraftvektors f_β in Bezug auf dasselbe Inertialsystem.
Die analoge Aussage gilt für die entsprechenden Drehmomente.

Der instantane Kraftvektor f_α am Ort des Massenpunktes Nr. α setzt sich additiv zusammen aus einem Beitrag $f_{\alpha\beta}$ der vom Massenpunkt Nr. β herrührt, und einem Beitrag $f_{\alpha s}$, der von allen übrigen Massenpunkten herrührt:

$$f_\alpha = f_{\alpha\beta} + f_{\alpha s} = f_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma\neq\alpha,\beta} f_{\alpha\gamma} \tag{3.1}$$

Für den Massenpunkt Nr. β angeschrieben lautet dies

$$f_\beta = f_{\beta\alpha} + f_{\beta s} \tag{3.2}$$

$f_{\alpha\beta}$ und $f_{\beta\alpha}$ sind Tangentenvektoren in 2 verschiedenen Tangentialräumen, nämlich in den gleichzeitigen Punkten q_α (Ort des Teilchens α), bzw. q_β (Ort des Teilchens β) und können ohne weiteres nicht miteinander verglichen werden.

Das IV. Grundgesetz bedeutet mathematisch genau folgendes:

Sei $\{x^a\}$ eine galileische Karte mit dem inertialen Ko-Rahmen $I^a = dx^a$ und den Killing-Formen $K^{ab} = x^a dx^b - x^b dx^a$, dann sollen die Beziehungen bestehen:

$$\langle I^a, f_{\alpha\beta}\rangle_{q_\alpha(s)} = -\langle I^a, f_{\beta\alpha}\rangle_{q_\beta(s)} \tag{3.3}$$

$$\langle K^{ab}, f_{\alpha\beta}\rangle_{q_\alpha(s)} = -\langle K^{ab}, f_{\beta\alpha}\rangle_{q_\beta(s)} \tag{3.4}$$

Da die f raumartige Tangentenvektoren sind, folgt aus (2.63) unmittelbar, daß diese Beziehungen relativ zu allen Inertialsystemen gelten, soferne sie in einem gelten.

In einer galileischen Karte lauten diese Gleichungen explizite:

$$f^i_{\alpha\beta} = -f^i_{\beta\alpha} \qquad q^i_\alpha f^k_{\alpha\beta} - q^k_\alpha f^i_{\alpha\beta} = -(q^i_\beta f^k_{\beta\alpha} - q^k_\beta f^i_{\beta\alpha}) \tag{3.5}$$

Dieses Wechselwirkungsgesetz ist allgemein gültig, es sagt aber nichts darüber aus, wie die einzelnen Kraftvektoren $f_{\alpha\beta}$ zu konstruieren sind; dies bleibt die wesentliche Aufgabe der speziellen Dynamik.

3.2 Die Observablen eines Massenpunktes

Die fundamentalste charakterisierende Eigenschaft eines Teilchens ist seine **Masse** m; sie ist das Maß für die Materiemenge, die dem Teilchen zukommt. Die Masse ist eine invariante Eigenschaft, sie hat denselben Wert relativ zu jedem Bezugssystem, sie ist also eine absolute Größe. Allgemein sind einem Teilchen noch weitere derartige **Charaktereigenschaften** zugeordnet ($z.B.$ elektrische Ladung, Spin, ...).

Neben den Charaktereigenschaften eines Teilchens gibt es **Zustandsvariable**, d. h. Meßgrößen, die sich im Laufe der Zeit ändern, und zu deren Angabe man i. a. ein Bezugssystem heranziehen muß. Diese Observablen sind also nur relativ zu einem gewählten Bezugssystem quantitativ bestimmt.

Zu einer Zeit sind zur Festlegung des **relativen Ortes** eines Massenpunktes 3 Zahlen, die instantanen Ortskoordinaten $q^k(s) := (x^k \circ q)(s)$ relativ zur gewählten Karte, durch Messung zu ermitteln. (Wir setzen $q^0(s) = s$, damit haben Differenzen von s die bestimmte Bedeutung der Dauer.)

Der instantane **Impulsvektor** p eines Massenpunktes der Masse m ist definiert als der Tangentenvektor $p := mu$. Observable (Meßgrößen) sind aber immer nur Zahlen; als solche werden die Komponenten des Impulsvektors relativ zu einem Bezugssystem $\{N^{\bar a}\}$ herangezogen:

$$p^{\bar a}(s) := \langle N^{\bar a}, p\rangle_{q(s)} \tag{3.6}$$

Wegen $N^{\bar 0} = Z$ ist in allen Bezugssystemen $p^{\bar 0}(s) = m$.

Für die Praxis wichtig sind die instantanen Komponenten des Impulses relativ zu einem Inertialsystem; sie sind definiert als die 4 Zahlen

$$p^a(s) := \langle I^a, p\rangle_{q(s)}, \qquad a = 0, 1, 2, 3 \tag{3.7}$$

Das Tripel $(p^1(s), p^2(s), p^3(s))$ wird meist als (relativer) *3-Impulsvektor* $\vec p(s)$ bezeichnet.

Die instantanen Komponenten des **Drehimpuls**es eines Massenpunktes relativ zu einer galileischen Karte (x^a) sind definiert mittels der 3 Killing-Formen K^{ik} als

$$l^{ik} := \langle K^{ik}, p\rangle, \qquad i, k = 1, 2, 3 \tag{3.8}$$

In einer galileischen Karte ergeben sich also die expliziten Ausdrücke:

$$l^{ik}(s) = q^i(s)p^k(s) - q^k(s)p^i(s) \tag{3.9}$$

Es ist üblich diese 3 Komponenten durch die Bezeichnung $l^1 := l^{23}$ etc. zyklisch zu einem *Drehimpulsvektor* $\vec{l} := (l^1,\, l^2,\, l^3)$ zusammenzufassen, und (3.9) kurz als $\vec{l} = \vec{q} \times \vec{p}$ zu schreiben.

Die verbleibenden 3 Komponenten

$$g^i := \langle K^{i0}, p\rangle, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.10}$$

haben in der zugehörigen galileischen Karte die Form:

$$g^i(s) = mq^i(s) - s\; p^i(s) \tag{3.11}$$

Die g^i nennen wir die instantanen Massenmomente und fassen sie zu einem (relativen) *3-Vektor* $\vec{g} := (g^1,\, g^2,\, g^3)$ zusammen.

Die instantane **Kinetische Energie** $T_N(s)$ eines Massenpunktes relativ zu einem Bezugssystem (N^a), (n_a) ist definiert als

$$T_N := \frac{1}{2m} \sum_1^3 \langle N^k, p\rangle^2 \tag{3.12}$$

Mit Hilfe des Relativimpulsvektors $p_n := p - \langle Z, p\rangle . n$
- eines raumartigen Tangentenvektors - kann man T_N auch schreiben als

$$T_N = \frac{1}{2m} |p_n|^2 \tag{3.13}$$

Für die Praxis wichtig sind die Inertialsysteme (I^a); wir schreiben T_I für die kinetische Energie relativ zum Inertialsystem I.

3.3 Integrale Meßgrößen eines Massenpunktesystems

Für ein System von N Massenpunkten können zu jeder Zeit durch Summation über den instantanen Raum folgende instantane integrale Größen definiert werden:

Die **Gesamtmasse** des Systems ist definiert als

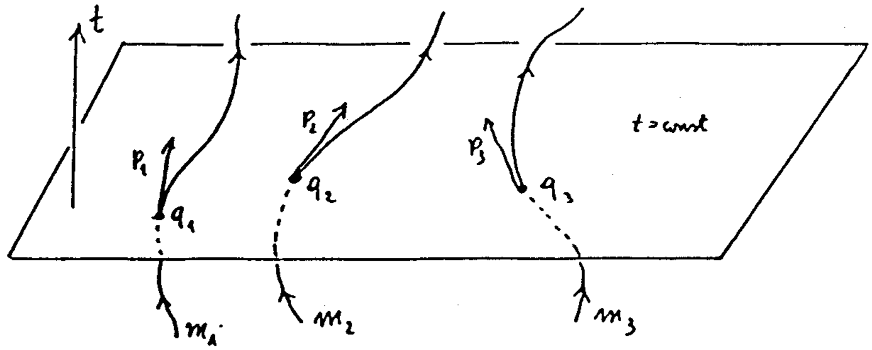
$$M := \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \tag{3.14}$$

M ist eine absolute Größe, und hat zu jeder Zeit denselben Wert (Erhaltungsgröße), weil das System aus immer denselben Massenpunkten besteht.

Die Komponenten des instantanen **Gesamtimpulses** relativ zu einem Bezugssystem (N^a) sind definiert als die Summe über den instantanen Raum:

$$P_N^a(s) := \sum_{\alpha=1}^{N} \langle N^a, p_\alpha\rangle_{q_\alpha(s)} \quad \text{wegen } \; N^0 = Z \text{ ist stets } P^0 = M. \tag{3.15}$$

Für die Praxis wichtig sind aber nur die Komponenten relativ zu einem Inertialsystem; das Tripel $(P^1, P^2, P^3) =: \vec{P}$ relativ zu einem Inertialsystem (I^a) nennen wir den relativen *3-Impulsvektor* des Systems. Zur Erläuterung diene Fig. 7



Man beachte, daß die Summe von Tangentenvektoren p_α aus verschiedenen Vektorräumen nur vermöge einer 1-Form, hier mittels eines gegebenen Ko-Rahmens (N^a) bzw. (I^a), gebildet werden kann; trotzdem ist die Kurzschreibweise üblich: $\vec{P} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha$.

Wir stellen fest, daß die Komponenten $P^a(s)$ zunächst keinen Tangentenvektor definieren, da der Punkt in der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit M erst definiert werden muß, in dem er definiert sein soll.

Mittels der Killing-1-Formen K^{ab} eines Inertialsystems, lassen sich weiters zu einer Zeit als integrale Größen eines Systems die Komponenten des instantanen relativen **Gesamtdrehimpulses** definieren:

$$L^{ik}(s) := \sum_\alpha \langle K^{ik}, p_\alpha \rangle_{q_\alpha} \tag{3.16}$$

üblich ist die Bezeichnung $L^1 := L^{23}$, $L^2 := L^{31}$, $L^3 := L^{12}$, und man faßt diese zum *3-Vektor* $\vec{L}$ des Gesamtdrehimpulses relativ zum Inertialsystem zusammen. Man beachte, daß die K^{ab} den Koordinatenursprung O auszeichnen, der Drehimpuls ist also bezüglich O definiert.

In der gewählten galileischen Karte hat man:

$$L^1(s) = \sum_\alpha [q^2_\alpha(s) p^3_\alpha(s) - q^3_\alpha(s) p^2_\alpha(s)] \tag{3.17}$$

dafür schreibt man kurz $\vec{L} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$

Die übrigen Komponenten

$$G^i(s) := \sum_\alpha \langle K^{i0}, p_\alpha \rangle_{q_\alpha} \tag{3.18}$$

haben in der zugehörigen galileischen Karte die explizite Form:

$$G^i(s) = MQ^i(s) - sP^i(s) \qquad \text{wobei} \tag{3.19}$$

$$Q^i(s) := \frac{1}{M}[G^i(s) + s\ P^i(s)] = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha q^i_\alpha(s) \tag{3.20}$$

die instantanen galileischen **Ortskoordinaten des Massenzentrums** (häufig auch Schwerpunkt genannt) sind.

Damit ist es nun möglich, dem Massenzentrum eine zeitartige Weltlinie zuzuordnen durch die Definition:

$$Q^0(s) := q^0_\alpha(s) = s, \qquad Q^i(s) \tag{3.21}$$

In jedem Punkt dieser Weltlinie ist ein Geschwindigkeitsvektor $U := \dot{Q}$ definiert, und als MU ein Impulsvektor. Bezüglich eines Inertialsystems (I^a) hat man die Gleichungen $< I^a, P) = MU^a$

Die instantane **kinetische Energie** eines Systems von Massenpunkten relativ zum Bezugssystem (N^a) ist definiert als die integrale Größe

$$T_N := \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha} \sum_1^3 \langle N^i, p_\alpha\rangle^2_{q_\alpha} \tag{3.22}$$

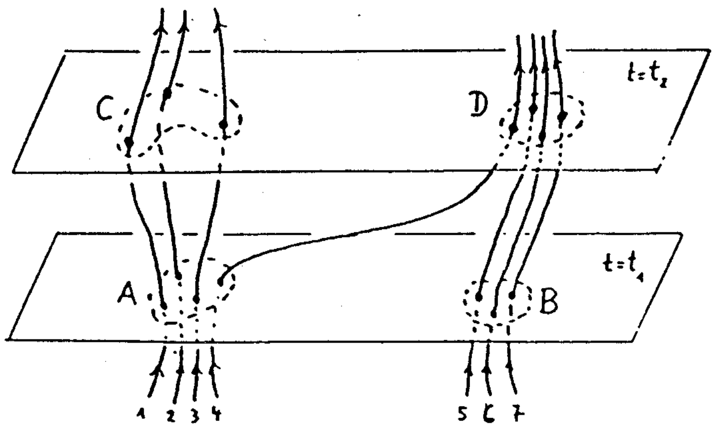
Für die Praxis wichtig ist T_I , die kinetische Energie eines Körpers relativ zu einem Inertialsystem.

Die physikalische Bedeutung aller hier besprochenen Größen relativ zu einem Inertialsystem sollte aus dem physikalischen Einführungsunterricht bekannt sein. Wir werden später, bei der Besprechung der Erhaltungssätze, die wichtige Rolle dieser Größen genauer kennenlernen. Hier lag es daran aufzuzeigen, wie diese Größen genau zu definieren sind, und in welcher Weise das gewählte Bezugssystem in die relativen Observablen eingeht.

3.4 Mechanische Körper

Wir definieren nun das Konzept eines Körpers und betrachten die allgemeine zeitliche Entwicklung eines Mehrkörpersystems.

Ein instantaner Körper ist definiert als ein zu dieser Zeit räumlich abgegrenztes System von Massenpunkten, das für eine gewisse Dauer von allen übrigen Massenpunkten abgegrenzt bleibt. Siehe Fig. 8



Zur Zeit t_1 sind die 2 Körper A, B mit den Massen $M_A = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$, $M_B = m_5 + m_6 + m_7$ vorhanden. Den Körpern A, B sind überdies relativ zu einem Inertialsystem die instantanen Impulsvektoren $\vec{P}_A$, $\vec{P}_B$, die Drehimpulsvektoren $\vec{L}_A$, $\vec{L}_B$ die Massenzentrumskoordinaten Q^i_A , Q^i_B , und die kinetischen Energien T_A , T_B zugeordnet. Zur Zeit t_2 gibt es die 2 Körper C, D mit den Massen $M_C = m_1+m_2+m_3$ $M_D = m_4+m_5+m_6+m_7$, den instantanen Impulsvektoren $\vec{P}_C$, $\vec{P}_D$, etc. Zwischenzeitlich sind die Körper durchmischt.

Man sieht auch, daß ein Körper durch Ausstoß von Teilchen ständig Masse verlieren kann (Rakete), daß aber die gesamte, überhaupt in der Welt vorhandene Masse zu allen Zeiten gleich ist.

Wir wissen heute, und dies ist eine der wichtigsten Erkenntnisse über die Materie, die von Einstein im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie gewonnen wurde, daß für Masse kein Erhaltungssatz gilt. Der Massenerhaltungssatz ist im Energieerhaltungssatz aufgegangen. Als Beispiel führen wir den α- Zerfall an: $A \to B + \alpha$ bei dem $M_A \neq M_B + M_\alpha$ (Massendefekt), oder als extremes Beispiel die Paarvernichtung; bei diesem Prozess wandelt sich ein Positron mit einem Elektron um in 2 Photonen: $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$.

3.5 Wechsel des Inertialsystems

Zwischen den Ko-Rahmen 2-er Inertialsysteme besteht die, schon nach (2.59) aufgezeigte Beziehung $I^a = \gamma^a{}_{\bar{a}} I^{\bar{a}}$. Daraus folgt für die instantanen Komponenten des Impulsvektors eines Teilchens die Transformationsformel

$$p^a = \gamma^a{}_{\bar{a}}\, p^{\bar{a}} \qquad \text{explizite heißt dies} \tag{3.23}$$

$$p^0 = p^{\bar{0}} = m, \qquad p^k = R^k{}_{\bar{k}}\, p^{\bar{k}} + mw^k \tag{3.24}$$

Aus (3.15) folgt, daß diese Beziehungen auch für die instantanen Komponenten des Gesamtimpulses eines Systems von Massenpunkten oder eines Körpers gelten, mit der Masse M anstelle von m.

Für die instantane relative kinetische Energie eines Teilchens folgt die Beziehung

$$T_I = T_{\bar{I}} + \vec{w}\vec{p} - \frac{m\vec{w}^2}{2} \tag{3.25}$$

Die Ersetzungen $p \to P$, $m \to M$ liefern die entsprechende Beziehung für die kinetische Energie eines Systems von Massenpunkten.

Die **kinetische Eigenenergie** eines Körpers wird definiert als

$$k := T_I - \frac{1}{2M}\vec{P}^2 \tag{3.26}$$

Aus den obigen Transformationsformeln folgt, daß die kinetische Eigenenergie eines Körpers (Systems) nicht vom Inertialsystem abhängt, sie ist eine **absolute Größe**, die den Körper (das System) in galileiinvarianter Weise charakterisiert.

Die kinetische Energie relativ zu einem Inertialsystem hängt also mit dem Impuls relativ zu diesem Inertialsystem und der invarianten kinetischen Eigenenergie zusammen durch die Gleichung:

$$T_I = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + k = \text{Translationsenergie} + \text{kinetische Eigenenergie} \tag{3.27}$$

Für die instantanen Komponenten des **Drehimpulses** und der Massenmomente liefert die Relation (2.63) die Transformationsformeln

$$l^{ab} = \gamma^a{}_{\bar{a}}\, \gamma^b{}_{\bar{b}}\, l^{\bar{a}\bar{b}} + c^a p^b - c^b p^a \tag{3.28}$$

die beiden letzten Terme rühren von der Verschiebung des Koordinatenursprungs her, der den Bezugspunkt für den Drehimpuls und die Massenmomente bildet.

Durch die Ersetzungen $l^{ab} \to L^{ab}$, $p^a \to P^a$ ergeben sich die Transformationsformeln für ein System von Massenpunkten oder einen Körper.

3.6 Der Eigendrehimpuls (Drall) eines Körpers

Aus den Komponenten L^{ab} und P^a konstruieren wir einen Kotangentenvektor $W(s) = W_a(s)(dx^a)_Q \in T^*_Q(M)$, der also im Kotangentialraum am jeweiligen Raum-Zeit-Punkt $Q(s)$ des Massenzentrums eines Körpers definiert ist:

$$W_d := \frac{1}{2M} E_{abcd} P^a L^{bc} \tag{3.29}$$

wobei $E_{0123} = 1$ etc. die Komponenten der Orientierungs-4-Form sind.

Wir nennen W den **Drall-Kovektor** des Körpers.

Bei einem Wechsel des Inertialsystems hat man die Transformationsformel

$$W_{\bar{a}} = W_a \gamma^a{}_{\bar{a}} \tag{3.30}$$

Aus der Definition von W folgt, daß zwischen dem Tangentenvektor des Gesamtimpulses $P \in T_Q(M)$ und dem Drall-Kovektor $W \in T^*_Q(M)$ die Beziehung besteht $< W, P) = 0$. W hat also nur 3 unabhängige Komponenten W_1, W_2, W_3. Wegen $P^0 = M$ folgt aus $W_a P^a = 0$ unmittelbar die Gleichung

$$W_0 = -\frac{1}{M} W_k P^k \tag{3.31}$$

Der instantane Drall eines Körpers, der als Betrag von W definiert ist, d. h. als die Wurzel aus $h(W, W)$ hängt nicht ab von der Wahl der galileischen Karte (x^a), zu der I^a und K^{ab} gehören; der Drall ist also eine **absolute Größe** oder eine Galileiinvariante.

In einer galileischen Karte erhält man den instantanen Drall als

$$|W| = \sqrt{(W_1)^2 + (W_2)^2 + (W_3)^2} \tag{3.32}$$

Mit Hilfe von h kann aus dem Kovektor W der raumartige Tangentenvektor $w := \underline{\sharp} W \in R_Q(M)$ gebildet werden. In einer Karte (x^ν) hat man die Gleichungen

$$w = w^\nu \partial_\nu = W_\sigma h^{\sigma\nu} \partial_\nu \tag{3.33}$$

$w \in T_Q(M)$ ist raumartig, $< Z, w) = 0$; daraus folgt, daß der Drall auch als Betrag des raumartigen Tangentenvektors w berechnet werden kann.

In einer galileischen Karte erhält man für die Komponenten von w die expliziten Ausdrücke:

$$\vec{w} = \vec{L} + \frac{1}{M} \vec{P} \times \vec{G} = \vec{L} - \vec{Q} \times \vec{P} \tag{3.34}$$

Im instantanen Ruhsystem des Körpers ist $\vec{P} = 0$, dort ist also $\vec{w} = \vec{L}$; der Drall ist also der Betrag des Drehimpulses im Ruhsystem des Körpers. Im Fall eines einzigen Massenpunktes (ohne intrinsischem Spin) gilt daher $\vec{w} \equiv 0$.

3.7 Integrale Bewegungsgleichungen für einen Körper

Aus den Bewegungsgleichungen für die einzelnen Massenpunkte, die den Körper zusammensetzen: $m_\alpha a_\alpha = f_\alpha$ folgen durch Summation über die instantantanen Komponenten bezüglich eines Inertialsystems (I^b) die 3 Gleichungen

$$\sum_\alpha m_\alpha \langle I^k, a_\alpha \rangle_{q_\alpha} = F^k, \qquad \text{wobei} \tag{3.35}$$

$$F^k := \sum_\alpha \langle I^k, f_\alpha \rangle_{q_\alpha} \tag{3.36}$$

die Komponenten der instantanen **Gesamtkraft** auf den Körper sind. Man schreibt dafür auch den Kraftvektor $\vec{F} := (F^1, F^2, F^3)$. Wie beim Gesamtimpuls definieren wir damit einen raumartigen Tangentenvektor $F \in R_Q(M)$ am Ort des Massenzentrums.

Weil (I^b) ein Inertialsystem ist, folgen unmittelbar die Gleichungen

$$M\ddot{Q}^k = F^k \tag{3.37}$$

Diese werden oft die Bewegungsgleichungen des Massenzentrums genannt. Eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die Ortsvariablen $Q^k(s)$ sind diese aber nur dann, wenn die F^k als Funktionen der Q^i und des Zeitparameters s allein ausgedrückt werden können. Dies ist i. a. nicht der Fall. Für ein isoliertes System von Massenpunkten (abgeschlossenes System ohne äußere Kräfte) gilt wegen Axiom IV $F^k = 0$.

Damit lautet die Lösung obiger Gleichung

$$Q^0(s) = s, \qquad Q^k(s) = A^k + sV^k \tag{3.38}$$

Die Konstanten A^k bedeuten die Ortskoordinaten des Massenzentrums zur Zeit 0, die Konstanten V^k sind die Geschwindigkeitskomponenten des Massenzentrums. Es ergibt sich also aus Axiom IV der

Schwerpunktsatz:
Die Weltlinie des Massenzentrums eines abgeschlossenen Systems von Massenpunkten ist eine zeitartige Gerade; d.h. der Schwerpunkt ist stets unbeschleunigt.

Außerdem folgt aus $P^k = M\dot{Q}^k = MV^k$ der

Impuls-Erhaltungssatz:
Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems von Massenpunkten ist konstant.

Die Gleichung (3.37) wird häufig in der Form geschrieben:

$$\frac{d}{ds}\vec{P} = \vec{F} \tag{3.39}$$

Falls $\vec{F} = 0$ folgt $\vec{P} = const.$

Mit Hilfe der Killing-Formen K^{ab} gewinnt man durch Summation über einen instantanen Raum analog zu (3.35) die Gleichungen

$$\sum_\alpha m_\alpha \langle K^{ik}, a_\alpha \rangle_{q_\alpha} = D^{ik} \qquad \text{wobei} \tag{3.40}$$

$$D^{ik} := \sum_\alpha \langle K^{ik}, f_\alpha \rangle_{q_\alpha} \tag{3.41}$$

das instantane **Gesamtdrehmoment** bezüglich O auf das System von Massenpunkten ist.

Man faßt die 3 Komponenten $D^1 := D^{23}$, $D^2 := D^{31}$, $D^3 := D^{12}$, zum Drehmomentvektor $\vec{D} = (D^1, D^2, D^3)$ zusammen. Analog zu (3.29) läßt sich auch ein Kovektor des Eigendrehmoments konstruieren, der am Ort des Massenzentrums definiert ist.

In einer galileischen Karte hat man die Ausdrücke:

$$\langle K^{ik}, a_\alpha \rangle = q_\alpha^i \ddot{q}_\alpha^k - q_\alpha^k \ddot{q}_\alpha^i = \frac{d}{ds}(q_\alpha^i \dot{q}_\alpha^k - q_\alpha^k \dot{q}_\alpha^i) \tag{3.42}$$

$$\langle K^{ik}, f_\alpha \rangle = q_\alpha^i f_\alpha^k - q_\alpha^k f_\alpha^i \tag{3.43}$$

Aus (3.17) ersieht man, daß die linke Seite von (3.41) als $\frac{d}{ds}L^{ik}$ geschrieben werden kann; man erhält also eine Gleichung für die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses eines Systems von Massenpunkten:

$$\frac{d}{ds}\vec{L} = \vec{D}, \qquad \text{mit} \tag{3.44}$$

$$\vec{D} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha \times \vec{f}_\alpha \tag{3.45}$$

Für ein abgeschlossenes System von Massenpunkten gilt wegen Axiom IV $\vec{D} = 0$. Daraus folgt der

Drehimpuls-Erhaltungssatz:
Der Gesamtdrehimpuls eines abgeschlossenen Systems von Massenpunkten bleibt konstant.

Abschließend bemerken wir, daß die Killing-Formen K^{0i} auf keine weiteren Aussagen führen.

Der Kern der Physik besteht darin: Aus den Erscheinungen der Bewegung die Kräfte der Natur zu erforschen, und danach durch diese Kräfte alle Erscheinungen zu erklären. Isaac Newton

Kapitel 4

Dynamik

4.1 Äußere Kräfte, die nicht von der Geschwindigkeit abhängen

Dem Konzept einer **Einwirkungskraft** liegt die Idee zu Grunde, daß die Kraft, die auf ein bestimmtes, herausgegriffenes Teilchen wirkt, zwar physikalisch von allen anderen Teilchen herrührt, diese aber nicht näher einbezogen werden müssen, sondern phänomenologisch durch ein **Einwirkungsfeld** ersetzt werden können. Das Einwirkungsfeld wird als ein Feld (skalares, vektorielles oder tensorielles) auf der Zeit-Raum-Mannigfaltigkeit M beschrieben, was mathematisch relativ einfach ist. Aus dem am jeweiligen Ort des Massenpunktes herrschenden Einwirkungsfeld wird unter Hinzuziehung von Größen, die der Massenpunkt selbst einbringt (Masse, Ladung, Geschwindigkeitsvektor), der momentan wirkende Kraftvektor f zusammengesetzt. Eine **Rückwirkung** des betrachteten Teilchens auf die das Einwirkungsfeld erzeugenden Teilchen kann auf diese Weise nicht erfaßt werden.

Wir behandeln hier die wichtigsten Beispiele für äußere Kräfte, die sich in der experimentellen Erfahrung bewährt haben.

In diesem Abschnitt behandeln wir den einfachsten Fall: die Kraft hängt nicht ab von der Geschwindigkeit des Teilchens. Das Einwirkungsfeld wird zunächst als eine gegebene 1-Form (Ko-Vektorfeld) G auf der Zeit-Raum-Mannigfaltigkeit M angenommen. Mittels der Bilinearform h gewinnt man aus G das raumartige Vektorfeld $g = \underline{\sharp} G$.

In einer Karte (x^ν) hat man

$$G = G_\nu(x^\sigma) dx^\nu, \qquad g = g^\nu(x^\sigma)\partial_\nu \qquad \text{mit} \qquad g^\mu := h^{\mu\nu}\, G_\nu \tag{4.1}$$

Der Kraftvektor f ist dem durch g am Ort des Massenpunktes definierten raumartigen Tangentenvektor proportional. Die Proportionalitätskonstante ist eine charakteristische Eigenschaft des Teilchens, die als **Kopplungskonstante** γ die Stärke bestimmt, mit der das Einwirkungsfeld am Teilchen angreift.

Das Bewegungsgesetz hat also die bestimmte Form:

$$m\, a = \gamma\, g \tag{4.2}$$

In einer Karte (x^ν) lauten die Bewegungsgleichungen für die Komponenten

$$m\, a^\nu = \gamma\, h^{\nu\sigma} G_\sigma \tag{4.3}$$

Die rechte Seite ist am momentanen Ort des Teilchens $q^\mu(s)$ zu nehmen, auf der linken Seite ist der Beschleunigungsvektor a gem.(2.30) einzusetzen, wodurch sich 4 Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Variablen $q^\mu(s)$ ergeben.

Anwendung findet diese Bewegungsgleichung bei der Bewegung eines Teilchens unter der Einwirkung eines Schwerefeldes; in diesem Fall ist die Kopplungskonstante die Masse des Teilchens: $\gamma = m$.

Auch im Falle der Bewegunung eines elektrisch geladenen Teilchens mit der Ladung e unter der Einwirkung eines Coulombfeldes wird dieses Bewegungsgesetz herangezogen, dabei ist $\gamma = e$. Später werden wir allerdings sehen, daß elektromagnetische Kräfte i. A. mit mehr Aufwand beschrieben werden müssen.

Im Falle der Schwerkraft ergibt sich die 1-Form G als eine exakte 1-Form, die sich aus einem Skalarfeld, dem newtonischen **Gravitationspotential** S ableitet: $G = -dS$.

Das **Gravitationspotential-Feld** S wird von der **Massendichte** $\rho(x^k, t)$ erzeugt; in einer galileischen Karte hat es die Form:

$$S(x^k, t) = -C \int d^3x' \frac{\rho(x', t)}{|x - x'|}, \qquad C = 6.670.10^{-11}\, Nm^2/kg^2 \tag{4.4}$$

dabei ist C die universelle Gravitationskonstante (Cavendish-Konstante).

Im Falle einer kugelsymmetrischen Massendichte mit Gesamtmasse M ergibt sich außerhalb dieser der allgemein gültige Ausdruck

$$S = -C\frac{M}{r} \tag{4.5}$$

wobei r der Abstand vom Zentrum der felderzeugenden Masse ist.

In einer galileischen Karte und mit zeitangepaßter Parameterisierung der Kurve lauten also die Bewegungsgleichungen

$$m\ \ddot{q}^k = -m\ S_{,k}(q^i), \qquad q^t(s) = s \tag{4.6}$$

Wegen $\gamma = m$ fällt die Masse des Teilchens aus der Bewegungsgleichung heraus, *d.h.* die Weltlinie eines Teilchens in einem äußeren Schwerefeld hängt nicht ab von Eigenschaften des Teilchens (“alle Körper fallen gleich“).

Diese Tatsache ist das Ergebnis zahlreicher Experimente; solche hat schon Newton durchgeführt. Wegen der fundamentalen physikalischen Bedeutung dieser Eigenschaft der Gravitation, die oft kurz als Gleichheit von träger Masse (m auf der linken Seite der Bewegungsgleichung) und schwerer Masse (Kopplungskonstante) bezeichnet wird, führte Eötvös von 1890-1910 eine Reihe von Experimenten durch, die mit einer Genauigkeit von 10^{-9} diese Gleichheit bewiesen. Seither konnte die Genauigkeit, vor allem durch Dicke, auf 10^{-11} gesteigert werden. Von Zeit zu Zeit wurde allerdings über experimentelle Hinweise berichtet, die eine gewisse Abhängigkeit der Schwerkraft von anderen Teilcheneigenschaften zu zeigen schienen, bisher aber gelten diese nicht als gesichert.

Die Äquivalenz von träger und schwerer Masse (Äquivalenzprinzip) war eines der Motive, die Einstein dazu führten, die Schwerkraft als eine rein geometrische Wirkung, als Auswirkung einer nichteuklidischen Geometrie der Zeit-Raum-Mannigfaltigkeit zu beschreiben (Allgemeine Relativitätstheorie).

Das **Coulombpotential** Φ einer statischen Ladungsverteilung $\rho(x^k)$ ergibt sich in einer galileischen Karte als

$$\Phi(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(x')}{4\pi|x - x'|}, \qquad G = -d\Phi \tag{4.7}$$

Das Vektorfeld g wird in diesem Fall mit $\vec{E}$ bezeichnet und elektrisches Feld genannt.

In einer galileischen Karte lautet also die Bewegungsgleichung für ein Teilchen mit der Ladung e

$$m\, \ddot{q}^k = eE^k(q) \qquad \text{mit} \quad E^k = -\Phi_{,k} \tag{4.8}$$

Die Bewegung des Teilchens hängt also von nur 1 Eigenschaft des Teilchens, dem Verhältnis e/m ab.

Wir schließen die allgemeine Behandlung dieser 2 Kraft-Typen mit dem Hinweis, daß in beiden hier betrachteten Fällen G eine exakte 1-Form ist, die sich also als Differential eines Skalarfeldes ergibt; die Möglichkeiten, die eine allgemeine 1-Form bieten würde, finden in der Physik keine Anwendung. In jedem Fall ist G nicht eindeutig aus der Kraft bestimmt, es gibt also eine ganze Klasse physikalisch äquivalenter G, da mit G auch $\hat{G} = G + \Lambda.Z$, mit einer beliebigen Funktion Λ (wegen $h(Z, -) = 0$) dieselbe Kraft liefert.

Die Besonderheit, daß G aus einem Skalarfeld ableitbar ist, hat tiefer liegende physikalische Gründe: es muß ja auch eine mathematische Formulierung von Gesetzen geben, aus denen die Einwirkungsfelder bestimmt werden. Für den Fall der Gravitation hat man zuerst solche **Feldgesetze** formulieren können. Wegen ihrer fundamentalen Bedeutung sollen hier die Feldgesetze der newtonischen Gravitationstheorie in ihrer modernen Form dargestellt werden.

4.2 Die newtonische Theorie des Gravitationsfeldes

Wir stellen zuerst **die Bauelemente** der Theorie zusammen:

1) Die newtonische Zeit-Raum-Struktur $\{M, Z, h, E, \nabla\}$ ist vorgegeben.
Es sei hier darauf hingewiesen, daß Einstein in seiner Gravitationstheorie keine a priori fixierte Zeit-Raum-Struktur annimmt, sondern diese als dynamisch annimmt.

2) Materie wird als Kontinuum beschrieben durch 2 dynamische Felder
ρ, v. $\rho \geq 0$ ist ein Skalarfeld auf M, es heißt Massendichte; v ist ein Geschwindigkeitsfeld, *d.h.* ein Vektorfeld auf M mit $< Z, v) = 1$.

Damit definiert man das Vektorfeld des Massenstroms $\quad j := \rho v$,
und die Massendichte-3-Form $\quad J := j \lrcorner E$.

Die Masse $M_V(t)$, die zu einer Zeit t im Volumen V enthalten ist, ergibt sich als das Integral der 3-Form J über dieses Volumen:

$$M_V(t) := \int_V J \tag{4.9}$$

3) Gravitationseinwirkung wird durch ein Skalarfeld S auf M beschrieben, S heißt Gravitationspotential.

(Man beachte, daß das Feld S keine Substanz, nichts materielles beschreibt, es ist die mathematische Beschreibung des **immateriellen agens Schwerkraft**, das durch den leeren Raum, ohne Vermittlung einer materiellen Substanz wirkt.)

Schließlich gehört zu den Bauelementen der Theorie noch eine universelle Konstante, die Gravitationskonstante (Cavendish-Konstante) C.

Mit den Bauelementen werden nun als Axiome die 2

Feldgesetze der Gravitation formuliert:

$$I) \qquad dJ = 0 \qquad \text{(Gesetz für die ponderable Materie)} \tag{4.10}$$

dies ist die differentielle Form des **Massenerhaltungssatzes**.

In einer Karte hat man für das Vektorfeld des Massenstromes die Darstellung $j = j^a \partial_a$, damit folgt aus I) die Kontinuitätsgleichung $j^a_{;a} = 0$, wobei die Divergenz des Massenstromes $j^a_{;a} = j^a{}_{,a} + \nabla^a_{ab} j^b$. Aus $dJ = 0$ folgt mittels des Satzes von Stokes, daß die Gesamtmasse M, *d.h.* das Integral der Massendichte-3-Form über einen instantanen Raum, nicht von der Zeit abhängt: Massenerhaltungssatz.

In einer galileischen Karte $(x^0 \equiv t,\ x^k)$, $k = 1, 2, 3$ hat man explizite die Gleichungen:

$$j = \rho\ \partial_t + \rho v^k\ \partial_k, \qquad j^a_{;a} = \frac{\partial}{\partial t}\rho + div(\rho\vec{v}) \tag{4.11}$$

$$J = \rho\ dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - j^1\ dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 - j^2\ dt \wedge dx^3 \wedge dx^1 - j^3 ... \tag{4.12}$$

woraus unmittelbar folgt: $\qquad dJ = (\rho_{,t} + div(\rho\vec{v})).E$

Als **Feldgleichung für das Gravitationsfeld** soll gelten:

$$II) \qquad \delta dS - \kappa^2 S = 4\pi C\ \rho \tag{4.13}$$

wobei $\delta := \underline{*} d \underline{*}$ die mittels h und E definierte Ko-Ableitung bezeichnet.

Diese Feldgleichung ist also eine inhomogene partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für das Gravitationsfeld S mit der Massendichte als Quellterm.

In einer Karte (x^ν) erhält man:

$$\underline{*} dS = S_{,\mu}\, h^{\mu\nu} E_{\nu\rho\sigma\tau}\ dx^\rho \wedge dx^\sigma \wedge dx^\tau / 3! \tag{4.14}$$

Speziell in einer galileischen Karte heißt dies:

$$-\underline{*} dS = S_{,1}\, dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 + S_{,2}\, dt \wedge dx^3 \wedge dx^1 + S_{,3}\, dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \tag{4.15}$$

Daraus folgt:

$$d\underline{*} dS = (S_{,11} + S_{,22} + S_{,33}).E \qquad \text{d. h.} \quad \delta dS = \Delta\ S \tag{4.16}$$

Die Feldgleichung lautet also explizite

$$(-\Delta + \kappa^2)S(t, x^k) = -4\pi C\rho(t, x^k) \quad \text{(Poisson-Gleichung)} \tag{4.17}$$

Die Lösung der Feldgleichung mit der Randbedingung $S \to 0$ für $r \to \infty$ ist eindeutig bestimmt. Man erhält sie als Integral mit der GREENschen Funktion $G(x - x')$ des Differentialoperators $-\Delta + \kappa^2$ aus den Formeln:

$$(-\Delta + \kappa^2)G(\vec{x} - \vec{x}') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \tag{4.18}$$

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{\exp(-\kappa|\vec{x} - \vec{x}'|)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{4.19}$$

$$S(t, \vec{x}) = -4\pi C \int d^3x' G(\vec{x} - \vec{x}')\rho(t, \vec{x}') \tag{4.20}$$

Die Konstante $1/\kappa$ beschreibt die Reichweite der Gravitationskraft; experimentell weiß man, daß sie sehr groß ist, sodaß man in der Praxis $\kappa = 0$ setzt.

Falls man von der Kontinuumsbeschreibung der Materie zu einem Aggregat von N Massenpunkten mit Weltlinien $q_n^t(s) = s$, $q_n^k(s)$, und Massen m_n, $n = 1, 2, ...N$ übergehen möchte, hat man die Ausdrücke:

$$\rho(t, x^k) = \int ds \sum_n m_n \delta(t - q_n^t(s))\delta^3(x^k - q_n^k(s)) \tag{4.21}$$

dies läßt sich kürzer schreiben als $\rho = \sum m_n \delta^3(x^k - q_n^k(t))$

$$j^i(t, x^k) = \sum_n m_n \dot{q}_n^i(t)\delta^3(x^k - q_n^k(t)) \tag{4.22}$$

$$S(t, \vec{x}) = -C \sum_n \frac{m_n}{|\vec{x} - \vec{q}^n(t)|} \tag{4.23}$$

Das Gravitationsfeld S zur Zeit t hängt also von den instantanen Lagen der felderzeugenden Massenpunkte ab, wie weit diese auch entfernt sein mögen.

4.3 Bewegung in einfachen Einwirkungsfeldern

Die wichtigsten Anwendungsbeispiele der Bewegungsgleichung ergeben sich in den Fällen, wo das Kraftpotential V, definiert als $\gamma G =: -dV$ zeitliche Translationsinvarianz und Drehinvarianz besitzt. Dies bedeutet, daß es eine galileische Karte (x^a) gibt, in der die folgenden Lie-Ableitungen null sind:

$$L_{\partial_0} V = V,_0 = 0 \qquad \text{zeitliche Translationsinvarianz der Dynamik} \tag{4.24}$$

$$L_{l_{ik}} V = x^i V,_k - x^k V,_i = 0 \qquad \text{Drehinvarianz der Dynamik} \tag{4.25}$$

Explizite heißt dies, daß die Funktion $V(x^a)$ nur von der Radialkoordinatenfunktion r abhängt, $r := \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$.

Durch das Potentialfeld V ist eine Klasse von galileischen Karten ausgezeichnet: die Ruhsysteme der felderzeugenden Masse (bzw. Ladung) mit Koordinatenursprung im Zentrum der Drehsymmetrie. Je 2 solcher Karten sind miteinander verknüpft durch eine Transformation der Form

$$x^0 = x^{\bar{0}} + c \qquad x^k = R^k{}_{\bar{k}}\; x^{\bar{k}} \tag{4.26}$$

Die von V erzeugte Dynamik hat, entsprechend der Invarianzgruppe von V, eine 4-dimensionale Lie-Gruppe als Symmetriegruppe. Die Symmetrieabbildungen werden erzeugt von den 4 Vektorfeldern $\partial_0,\ x^i\partial_k - x^k\partial_i$.

Aus dieser Symmetrie der Dynamik folgen 2-erlei Konsequenzen:

1) Mit jeder Lösung der Bewegungsgleichung $q^a(s)$ ist auch jede daraus durch eine Symmetrieabbildung (hier: zeitliche Translationen und Drehungen um O) hervorgehende Weltlinie $\hat{q}^a(s)$ eine Lösung.

2) Für jede Lösung gelten 4 Erhaltungssätze:
Die Energie E ist zufolge der zeitlichen Translationsinvarianz von V eine Konstante. Die 3 Komponenten des Drehimpulses $\vec{L}$ bezüglich 0 sind Bewegungskonstanten.

Wir wählen die zeitangepaßte Parameterisierung $(x^0 \circ q)(s) =: q^0(s) = s$; die Bewegungsgleichung liefert damit für die Ortsvariablen $q^k(s)$ die Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$m\;\ddot{q}^k = -V_{,k}\,(q^i) \tag{4.27}$$

Die zeitliche Translationsinvarianz von V hat den
Energie-Erhaltungssatz zur Folge:

$$E := \frac{m}{2}\dot{q}^k\dot{q}^k + V(q^i) = E_{kin} + E_{Lage} = const \tag{4.28}$$

denn $\dot{E} = m\ddot{q}^k\dot{q}^k + V_{,k}\,\dot{q}^k + V_{,t} = V_{,t} = 0$.

Die Drehinvarianz von V hat den **Drehimpuls-Erhaltungssatz** zur Folge. Der Drehimpuls des Massenpunktes bezüglich des Symmetriezentrums O ist definiert als

$$L^{ik} =< K^{ik}, p) = m(q^i\dot{q}^k - q^k\dot{q}^i) \tag{4.29}$$

Diese 3 Größen sind als Folge der Drehinvarianz von V Bewegungskonstanten, denn $\dot{L}^{ik} = m\; q^i\ddot{q}^k - \ddot{q}^i q^k = q^k V_{,i} - q^i V_{,k} = 0$

Der Drehimpuls-Erhaltungssatz kann anschaulich formuliert werden durch die 2 Sätze:
a) Die 3-dimensionale Bahnlinie $q^k(s)$ bleibt in einer Ebene (Bahnebene).
b) Der Fahrstrahl vom Kraftzentrum zum Massenpunkt überstreicht in gleichen Dauern gleiche Flächen (Flächensatz).

Der Genauigkeit halber sei darauf hingewiesen, daß die 3-dimensionale Bahnlinie definiert ist mittels der Flußabbildung, die vom Vektorfeld ∂_0 das die zeitliche

Translationssymmetrie erzeugt, geliefert wird: mit den Integralkurven von ∂_0 kann die 4-dimensionale zeitartige Weltlinie $q^a(s)$ auf einen festen instantanen Raum projiziert werden.

Beweis von a) und b):

Wir wählen das Koordinatensystem so, daß zu $s = 0$ die Anfangsdaten $q^3(0) = 0$, $\dot{q}^3 = 0$. Aus (4.29) folgt damit $L^1(0) := L^{23}(0) = 0$, $L^2(0) := L^{31}(0) = 0$, also wegen der Konstanz der L^{ik} auch $L^1(s) = 0$, $L^2(s) = 0$. Die Konstante $M := L^3(s) := L^{12}(s)$ ist die 3-Komponente des Drehimpulsvektors $\vec{L}$.

Aus $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{v}$ folgt $q^k L^k \equiv 0$, *d.h.* $q^3 M = -q^1 L^1 - q^2 L^2 = 0$; für $M \neq 0$ folgt daraus die Aussage $q^3(s) = 0$, die Bahnkurve bleibt also immer in der 1-2-Ebene.

Der Ausdruck $|\frac{1}{2}(q^1\dot{q}^2 - \dot{q}^1 q^2)|$ bedeutet die vom Fahrstrahl pro Zeiteinheit überstrichene Fläche; $L^{12}(s) = M = const.$ sagt also aus, daß diese den konstanten Wert $l/2m$ hat , wobei $l := |M|$ der Betrag des Drehimpulses ist.

Für die weitere Bestimmung der Bewegung ist es wegen der Drehsymmetrie günstig, Kugelkoordinaten r, ϑ, φ einzuführen und die Bahnebene als $\vartheta = \pi/2$ zu wählen.

$$x^1 = r\ sin\vartheta\ cos\varphi, \quad x^2 = r\ \sin\vartheta\ sin\varphi, \quad x^3 = r\ cos\vartheta \tag{4.30}$$

Zugunsten der leichteren Lesbarkeit der folgenden Formeln wollen wir dem allgemein üblichen Mißbrauch folgen, und die Ortsvariablen des Massenpunktes bezeichnen mit $r(s) := q^r(s), \qquad \varphi(s) := q^\varphi(s)$
Im Folgenden ist also $\qquad r := q^r(s) = r \circ q, \qquad \varphi := q^\varphi(s) = \varphi \circ q$
Der Flächensatz lautet damit

$$mr^2\dot{\varphi} = M \qquad \text{daraus folgt} \quad \dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2} \tag{4.31}$$

Der Energiesatz lautet:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E \tag{4.32}$$

Elimination von $\dot{\varphi}$ mittels (4.31) liefert für $r(s)$ die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})} \qquad \text{wobei} \quad V_{eff}(r) := V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \tag{4.33}$$

dabei gilt das + Zeichen für jene Bahnteile, wo $r(s)$ mit der Zeit wächst, das - Zeichen für jene Bahnteile, wo r mit der Zeit abnimmt.

Der Ausdruck unter der Wurzel muß ≥ 0 sein; für ein gegebenes $V(r)$ läßt sich daraus leicht das Gebiet ermitteln, in dem die Bahnlinie verlaufen muß: in jenem Bereich, wo $V(r) + l^2/2mr^2 \leq E$. Allgemein ergeben sich daraus 1 oder mehrere Kreisringgebiete in denen die Bahn liegen muß.

Die Lösung ist nun durch Integrale darstellbar:

$$s - s_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r')]}} \tag{4.34}$$

woraus $r(s)$ als Umkehrfunktion folgt.

Schließlich ergibt sich aus der Gleichung (4.31) die Funktion $\varphi(s)$ als:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{s_o}^{s} \frac{ds' M}{mr^2(s')} \tag{4.35}$$

Wenn man nur die räumliche Form der Bahn sucht, dann geht man aus von der **Gleichung für die Bahnlinie**:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{M}{mr^2} \{ \frac{2}{m} [E - V_{eff}(r)] \}^{-\frac{1}{2}} \tag{4.36}$$

$\varphi(r)$ folgt daraus als das Integral:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{M dr'}{mr'^2 \sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r')]}} \tag{4.37}$$

Diese Ergebnisse sollen nun für den Fall des Kepler-Problems explizite ausgewertet werden.

Das Kepler - Problem:

Der Fall $V(r) = -\alpha/r$, $\alpha \epsilon \mathbf{R}$, ist elementar integrierbar; man führe anstelle von r die Variable $u := c/r$ ein, damit werden alle Integrale (4.34) – (4.37) elementar. Als Bahnlinien ergeben sich die bekannten Kepler-Ellipsen für die finiten Bahnen und Hyperbeln für die infiniten Bahnen.

Die Lösungen können auch ohne die Beherrschung der Differentialgleichungen mit synthetischen Methoden konstruiert werden. Dieser glückliche Zufall hat historisch nicht wenig zum triumphalen Aufstieg der Physik in der Zeit Newtons beigetragen.

Wegen der Wichtigkeit einer genauen Kenntnis der Lösungen für diese Problem werden diese in den Aufgaben 7) und 8) ausführlich behandelt.

4.4 Äußere Kräfte, die auch von der Geschwindigkeit abhängen

Elektromagnetische Einwirkungen

Physikalisch besonders wichtig sind die Kräfte, welche elektrische und magnetische Felder auf geladene Teilchen ausüben. Allgemein sind elektrisches und magnetisches Feld als eine Einheit zu betrachten (elektromagnetisches Feld), die Aufteilung ist nur relativ zu einem Inertialsystem möglich. Ein elektromagnetisches Feld (Faradayfeld oder Maxwellfeld) wird mathematisch beschrieben durch eine 2-Form F in M.

In einer Karte $\{x^\nu\}$ hat man den Ausdruck

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \qquad mit \quad F_{\nu\mu}(x) = -F_{\mu\nu}(x) \tag{4.38}$$

es gibt also 6 unabhängige Feld-Komponenten.

Bezüglich einer galileischen Karte (x^a), $a = 0, 1, 2, 3$, mit dem Rahmen (∂_a) und dem Korahmen (dx^a) kann die 2-Form F in 2 raumartige Vektorfelder $\vec{E} = E^k \partial_k$, $\vec{B} = B^k \partial_k$ zerlegt werden durch die Definitionen:

$$\vec{E} := \underline{\sharp}(\partial_0 \lrcorner F), \qquad -\vec{B} := \underline{\sharp}(\partial_0 \lrcorner *F) \tag{4.39}$$

Explizite hat man

$$F = E^k dx^0 \wedge dx^k - B^1 dx^2 \wedge dx^3 - B^2 dx^3 \wedge dx^1 - B^3 dx^1 \wedge dx^2 \tag{4.40}$$

$$*F = F_{12} dx^0 \wedge dx^3 + \text{zyklische Terme} \tag{4.41}$$

d.h. $\quad E^k := F_{0k} \quad$ sind die Komponenten der **elektrischen Feldstärke** relativ zum Inertialsystem, $\quad B^1 := -F_{23}$, $B^2 := -F_{31}$, $B^3 := -F_{12} \quad$ sind die Komponenten der **magnetischen Feldstärke** (Induktion) relativ zum Inertialsystem.

Die experimentelle Erfahrung über die Bewegung geladener Teilchen führte zur Bewegungsgleichung

$$m\ a = e\underline{\sharp}(u \lrcorner F) \qquad \text{(Lorentzkraft)} \tag{4.42}$$

vom Teilchen gehen also die Größen e/m und u ein.

In einer Karte (x^ν) erhält man die 4 Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$m\ a^\nu = -e\ h^{\nu\sigma} F_{\sigma\rho} u^\rho \tag{4.43}$$

wobei auf der rechten Seite F am momentanen Ort des Massenpunktes zu nehmen ist. Neben der Charaktereigenschaft e des Teilchens (elektrische Ladung) ist also auch der jeweilige Geschwindigkeitsvektor u zur Bildung des Kraftvektors heranzuziehen.

In einer galileischen Karte ergeben sich die 3 Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$m\ddot{q}^k = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})^k \qquad \text{(Lorentzkraft)} \tag{4.44}$$

Die **Feldgesetze für elektromagnetische Felder** wurden erstmalig um 1867 von Maxwell formuliert, danach von H. Hertz, Lorentz, Einstein und Minkowski in die endgültige Form gebracht. Dieses Gebiet der Physik, die **Elektrodynamik**, ist eines der wichtigsten und anwendungsreichsten (Elektrotechnik). Die ausführliche Darstellung der Elektrodynamik erfolgt in einer eigenen Vorlesung.

Hier sei nur eines der Grund-Gesetze der Elektrodynamik angeführt:

Die 2-Form F ist exakt, d. h. $\quad \mathrm{F} = \mathrm{dV}$

V ist eine 1-Form; wir bezeichnen sie als ein **Fotofeld**. Wiederum ist es so, daß das unmittelbar in die Kraft eingehende Feld F ein Potentialfeld V besitzt, das als das eigentlich zu Grunde liegende fundamentale Feld anzusehen ist.

* Erweiterte Möglichkeiten für die Schwerkraft

Genauere Untersuchungen der Schwerkraft zeigten, daß die newtonische Theorie der Gravitation nicht ganz zutreffend ist. Die Periheldrehung der Merkurbahn, und der nichtmechanische Effekt der Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld der Sonne, sind die wichtigsten Effekte, die dies belegen.

Nach dem Vorschlag von Einstein ist bei einer genaueren Beschreibung der Schwerkraft eine quadratische Geschwindigkeitsabhängigkeit der Kraft anzunehmen. Solche Kräfte kann man konstruieren, wenn man als Einwirkungsfeld ein Tensorfeld vom Typ $\quad S^{\nu}_{\rho\sigma} = S^{\nu}_{\sigma\rho} \quad$ heranzieht, das außerdem die Bedingungen $\quad Z_\nu S^{\nu}_{\rho\sigma} = 0 \quad$ erfüllt. Ein solches Feld S enthält *i.a.* 30 unabhängige Komponenten.

Der Kraftvektor $f = f^\nu \partial_\nu$ könnte damit konstruiert werden als

$$f^\nu = -\gamma \; S^{\nu}_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma \tag{4.45}$$

Der spezielle Fall $S^{\nu}_{\rho\sigma} = h^{\nu\mu} S_{,\mu} \, Z_\rho Z_\sigma$ führt zurück auf die newtonische Bewegungsgleichung mit dem Gravitationspotential S; darüber hinaus läßt ein Tensorfeld aber eine verbesserte Beschreibung der Schwerkraft zu. Genauere Experimente erfordern eine solche Beschreibung (Periheldrehung des Merkur).

Aus $\gamma = m$ folgt auch in einer tensoriellen Beschreibung des Gravitationsfeldes, daß die Bewegung in einem äußeren Schwerefeld unabhängig ist von Charaktereigenschaften des Teilchens („alle Körper fallen gleich").

Man sieht ohne Schwierigkeit, daß die aus (4.45) folgende Bewegungsgleichung als eine Geradengleichung zu einem entsprechenden Affinzusammenhang interpretiert werden kann:

$$\tilde{\nabla}_u u = 0 \tag{4.46}$$

wobei der **dynamische Affinzusammenhang** $\tilde{\nabla}$ definiert ist durch

$$\tilde{\nabla}^{\nu}_{\rho\sigma} = \nabla^{\nu}_{\rho\sigma} + S^{\nu}_{\rho\sigma} \tag{4.47}$$

$\tilde{\nabla}$ ist ein torsionsfreier, Z-verträglicher Zusammenhang; die Geraden zu $\tilde{\nabla}$ sind also durchgehend zeitartig; $\tilde{\nabla}$ ist aber nicht krümmungsfrei und auch nicht h-verträglich.

Es wäre nun eine natürliche Frage, wie die instantanen Geometrien aussehen, die der Bedingung genügen, daß die (raumartigen) Geodäten mit den Geraden von $\tilde{\nabla}$ zusammenfallen.

Eine andere interessante Frage ist: unter welchen Bedingungen an $S^{\nu}_{\rho\sigma}$ existieren gewisse Erhaltungssätze; insbesonders wann ist der Energieerhaltungssatz gültig? Wir werden erst später, bei der Behandlung Lagrange'scher Systeme, auf diese Fragen eingehen.

Der Tangentenvektor $\tilde{a} := \tilde{\nabla}_u u$ kann als eine *andere Beschleunigung* aufgefaßt werden, die mittels des Affinzusammenhanges $\tilde{\nabla}$ definiert ist. Da **Scheinbeschleunigungen** dieser Art auch sonst in der physikalischen Praxis benützt werden, und, leider, sehr viel Verwirrung stiften, soll das Konzept der Scheinbeschleunigungen hier genau dargestellt werden.

4.5 * Scheinbeschleunigungen und Scheinkräfte

In Kap.2 wurde gezeigt, daß der Betrag der Beschleunigung relativ zu jedem Bezugssystem denselben Wert hat; die Beschleunigung ist das absolute Maß für das Vorhandensein einer wahren Bewegung. Ebenso steht in absoluter, willkürfreier Weise fest, ob ein Teilchen unter der Einwirkung einer Kraft steht oder nicht.

Aus rechenmethodischen Gründen werden aber neben der newtonischen Beschleunigung, die in (2.28) eindeutig definiert ist, noch andere, sogenannte Scheinbeschleunigungen eingeführt. Eine solche wird je nach Problemstellung gewählt bzw. an das jeweils benützte Bezugssystem angepaßt gewählt. Diese Praxis stiftet sehr viel Verwirrung, weil sie meistens nicht klar dargestellt wird.

Wenn man mit einer Scheinbeschleunigung $\tilde{a}$ arbeitet, dann ist in der Bewegungsgleichung der **wahren Kraft** f eine **Scheinkraft** s hinzuzuaddieren. Eine Scheinkraft ist stets der Masse m (träge Masse) porportional, mann nennt die Scheinkräfte deshalb auch *Trägheitskräfte*.

Die Scheinkräfte, die am häufigsten benützt werden sind die Zentrifugalscheinkraft bzw. die Coriolis-Scheinkraft; diese finden praktische Anwendung bei Verwendung der rotierenden Erde als Bezugssystem, das Z-angepaßt, euklidisch, aber nichtinertial ist. Dabei wird der Affinzusammenhang $\tilde{\nabla}$ so gewählt, daß seine Komponenten im erdfesten Koordinatensystem alle 0 sind; die Komponenten der Scheinbeschleunigung $\tilde{a}$ sind dann einfach als Zeitableitungen der Geschwindigkeitskomponenten zu berechnen.

Weiters sei hier darauf hingewiesen, daß man für jede konkrete Lösung der Bewegungsgleichungen eines beliebigen Systems von Massenpunkten immer die Weltlinie eines bestimmten Massenpunktes (oder des Massenzentrums) herausgreifen kann und dazu einen Affinzusammenhang $\tilde{\nabla}$ angeben kann, so daß die Scheinbeschleunigung dieses Massenpunktes immer 0 ist.

Man kann auch eine viel größere Klasse von Scheinbeschleunigungen als die eben besprochenen heranziehen, wenn man für $\tilde{\nabla}$ neben der Torsionsfreiheit und der Krümmungsfreiheit nur noch die Verträglichkeit mit der Zeitform Z verlangt, auf die Verträglichkeit mit h aber verzichtet.

Die Geraden zu einem solchen $\tilde{\nabla}$ mit einer zeitartigen Anfangstangente sind zeitartige Weltlinien; die raumartigen Geraden zu $\tilde{\nabla}$ sind aber keine Geodäten zu der von h induzierten instantanen Geometrie. Die Gleichung (4.54) bleibt unverändert bestehen und macht viele mathematische Spielereien, die man mit Scheinkräften treiben kann, möglich. Die Essenz dieses Spiels besteht darin, daß immer dann, wenn die wahren Kräfte solcher Art sind, daß sie von einer Scheinkraft kompensiert werden können (die Bewegungsgleichung also $\tilde{a} = 0$ lautet, mit einem geeigneten $\tilde{\nabla}$), durch einen Kartenwechsel jene Karte (x^ν) herangezogen werden kann, in der wegen der Krümmungsfreiheit $\tilde{\nabla}^\mu_{\sigma\nu} = 0$ gilt, was die Lösung der Gleichung $\tilde{a} = 0$ trivial macht.

Eine noch größere Klasse von Scheinbeschleunigungen ergibt sich, wenn man auch noch die Forderung der Krümmungsfreiheit für $\tilde{\nabla}$ aufgibt und nur Torsionsfreiheit und Z-Verträglichkeit, also die Bedingungen 1) und 3) verlangt. Damit kann man *z.B.* die Bewegungsgleichung für Elektronen in einem beliebigen elektromagnetischen Kraftfeld $F_{\mu\nu}$ als $\tilde{\nabla}$- Geradengleichung $\tilde{a} = 0$ schreiben.

Der Affinzusammenhang $\tilde{\nabla}$, der dies leistet lautet in einer Karte (x^ν) :

$$\tilde{\nabla}^\mu_{\sigma\nu} = \nabla^\mu_{\sigma\nu} + S^\mu_{\sigma\nu}, \qquad \text{mit} \quad S^\mu_{\sigma\nu} = \frac{e}{2mc^2} h^{\mu\rho}(F_{\rho\sigma} Z_\nu + F_{\rho\nu} Z_\sigma) \tag{4.48}$$

Man sieht leicht, daß die Geradengleichung dieses Affinzusammenhanges mit der Bewegungsgleichung (4.42) übereinstimmt. Es liegt aber keine universelle geometrische Struktur vor, da je nach Teilchenart die Charaktergröße e/m eingeht.

Warnung! Scheinbeschleunigungen und Scheinkräfte sind mathematische Konzepte, die nicht in die Hände von mathematisch ungenügend gebildeten Menschen gehören!!!

4.6 Wechselwirkungskräfte

Die Beschreibung der Einwirkung auf ein Teilchen mittels eines äußeren Einwirkungsfeldes erlaubt nicht die Erfassung der Rückwirkung des betrachteten Teilchens auf die, das Einwirkungsfeld verursachenden Teilchen. Wenn man eine vollständige Theorie anstrebt, welche die gesamte Materie umfassend beschreiben soll, dann muß die Dynamik so ausgebaut werden, daß jedes materielle System (wenigstens im Prinzip) als abgeschlossenes System von N Massenpunkten vollständig beschrieben wird: Die N Teilchen üben aufeinander Kräfte aus, sie sind in **Wechselwirkung** miteinander, irgendwelche anderen Teilchen sind beliebig weit entfernt, sodaß sie wegen des III. Grundgesetzes außer Betracht bleiben können.

Für den Fall der Gravitationswechselwirkung hat Newton eine vollständige mechanische Theorie gefunden. Diese Leistung ist so großartig, daß sie – verallgemeinert und ausgebaut auf Kräfte anderer Art – zu einem umfassenden physikalischen Weltbild führte, das für fast 2 Jahrhunderte der gesamten Naturwissenschaft als einziges Paradigma diente.

Newton nimmt die Bewegungsgleichung (4.6) für die Weltlinie jedes einzelnen Teilchens des Systems an, wobei je 2 Teilchen, entsprechend der lex tertia, entgegengesetzt gleiche Kräfte aufeinander ausüben. In einer galileischen Karte erhält man so die Bewegungsgleichungen

$$m_\beta \ddot{q}^k_\beta = m_\beta \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{C m_\alpha (q^k_\alpha - q^k_\beta)}{r^3_{\alpha\beta}} \qquad \alpha, \beta = 1, 2, ...N \tag{4.49}$$

dabei ist

$r_{\alpha\beta} := \sqrt{\sum (q^k_\alpha - q^k_\beta)^2}$ der ins intane Abstand der Teilchen α und β

Die genauere mathematische Bedeutung dieser Gleichungen wird später behandelt werden. Hier begnügen wir uns mit den folgenden Feststellungen:

> Die Kraft auf ein herausgegriffenes Teilchen ist die vektorielle Summe der Teilkräfte aller übrigen Teilchen. Die Kraft zwischen je 2 Teilchen ist anziehend, in Richtung der Verbindungsgeraden gerichtet, proportional dem Produkt der beiden Massen, und sie nimmt mit dem inversen Quadrat der Entfernung ab.

Verwunderlich für die allgemeine physikalische Intuition ist die Tatsache, daß die Wechselwirkung 2-er Teilchen durch ihren instantanen Abstand bestimmt ist, wie groß er auch sei; sie braucht also keine Zeit zur Ausbreitung (Fernwirkung). Heute wissen wir sehr genau, daß jede physikalische Wirkung eine endliche Ausbreitungszeit braucht, die durch die universelle Grenzgeschwindigkeit $c = 3.10^8\ msec^{-1}$ limitiert ist. Wenig befriedigend ist ferner die Tatsache, daß die **Kräfte als immaterielles agens** auftreten, die Teilchen also durch den leeren Raum, ohne vermittelnde materielle Substanz, miteinander wechselwirken.

Die Bewegungsgleichungen (4.65) geben ein Beispiel für eine mathematisch vollständige Beschreibung eines materiellen Systems, die Newton's lex tertia erfüllt. Genauer besehen hat diese Dynamik aber eine weitergehende Eigenschaft, die sich als ein fundamentales Naturgesetz herausgestellt hat: die **Galilei-Symmetrie der Dynamik**. Dies bedeutet das folgende: Aus jeder Lösung der Bewegungsgleichungen (sie besteht aus N zeitartigen Weltlinien q_α) geht durch eine Galilei-Abbildung gem.(2.67) wieder eine Lösung hervor, also N zeitartige Weltlinien $\hat{q}_\alpha$, die die Bewgungsgleichungen erfüllen. Die Gruppe der Galilei-Abbildungen hat also eine über die nur geometrische (Isometriegruppe der newtonischen Raum-Zeit-Struktur) hinausgehende Bedeutung als

> **Symmetriegruppe der Dynamik**:
>
> Die Galileigruppe ist Symmetriegruppe der Dynamik für das obige abgeschlossene mechanische System.

Die Möglichkeit dieser Symmetriegruppe der Dynamik hat die Galilei-Isometrie der Raum-Zeit-Struktur zur Voraussetzung; sie bedeutet aber viel mehr, nämlich das Vorhandensein gewisser allgemeiner Eigenschaften der Wechselwirkung der Teilchen, also der Dynamik. Die triviale Dynamik $f = 0$ eines einzigen, isolierten Teilchens besitzt auch die Galileisymmetrie; umgekehrt führt in diesem Fall die Forderung der Galileisymmetrie auf das einzig mögliche Bewegungsgesetz $a = 0$.

4.7 Das galileische Relativitätsprinzip

Das allgemeine Wechselwirkungsgesetz NEWTONs, das wir als IV. Grundgesetz der klassischen Mechanik formuliert haben, stellte sich im Laufe der Entwicklung als eine Konsequenz eines ganz allgemeinen Symmetrie-Prinzips der Dynamik abgeschlossener Systeme heraus, dem alle fundamentalen Wechselwirkungskräfte unterworfen sind. Dieses Prinzip nennt man mit POINCARÉ das **galileische Relativitätsprinzip**. In einem Vortrag im Jahre 1904 mit dem Titel: *Der Stand der theoretischen Physik an der Jahrhundertwende* sagte POINCARÉ:

> Newtons Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ist eng mit dem Relativitätsprizip verknüpft, und es scheint, daß der Zusammenbruch des einen den des anderen nach sich ziehen würde.

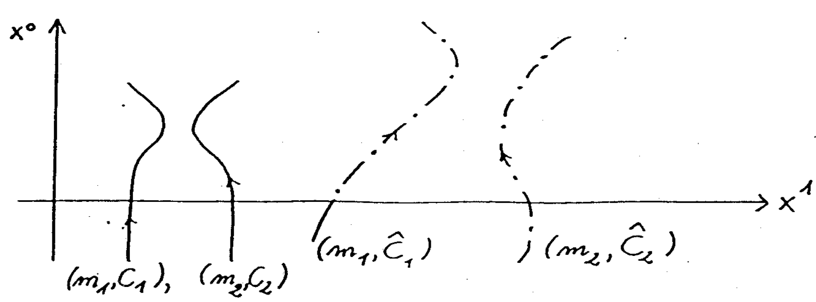
Die Galileigruppe operiert zunächst als Gruppe von Abbildungen der Zeit-Raum- Mannigfaltigkeit in sich $\Phi_g : M \to M : m \mapsto \Phi_g(m)$, damit werden auch zeitartige Weltlinien auf zeitartige Weltlinien abgebildet, also Massenpunkte auf Massenpunkte.

Φ_g induziert aber auch Abbildungen aller Arten von Feldern, die zur Formulierung einer Theorie auf der Basis der newtonischen Mannigfaltigkeit herangezogen werden, auf Felder desselben Typs. Dadurch ist das galileische Relativitätsprinzip in die verschiedensten Theorien übertragbar, *z.B.* in die Kontinuumsmechanik oder in die SCHRÖDINGERsche Wellenmechanik etc.

Hier formulieren wir das Prinzip der Galilei-Symmetrie in der Form, die den Gegebenheiten der Massenpunkt-Systeme entspricht, als nun endgültige Formulierung des 4. Grundgesetzes der Mechanik:

> **IV. Grundgesetz** (galileisches Relativitätsprinzip)
> Als mögliche Wechselwirkungen zwischen den Teilchen eines abgeschlossenen Systems kommen nur solche in Betracht, die garantieren, daß mit jeder Lösung der Bewegungsgleichungen auch die, durch eine Galilei-Abbildung daraus hervorgehenden, Weltlinien wieder eine Lösung sind.

Zur Erläuterung diene Fig. 9



C_1 und C_2 sind Lösungen der Bewegungsgleichungen; $\hat{C}_1$ und $\hat{C}_2$ sind die jeweiligen Bild-Weltlinien, die durch eine beliebige Galileiabbildung Φ_g entstehen, auch sie sind Lösungen der Bewegungsgleichungen.

Das galileische Relativitätsprinzip hat 3 Arten von Konsequenzen:

a) **Galilei-Symmetrie der Lösungen** (Galileiklassen):

Jede Galileiabbildung führt eine Lösung der Bewegungsgleichungen, also eine mögliche raumzeitliche Konfiguration des Teilchensystems, in eine auch mögliche Konfiguration über. Man kann alle Lösungen, die aus einer bestimmten durch die Gesamtheit aller Galileiabbildungen hervorgehen in eine Klasse von äquivalenten eine *Galileiklasse* zusammenfassen. In einer gewissen Hinsicht sind alle Lösungen einer Galileiklasse physikalisch äquivalent, nämlich in dem Sinne, daß man das Bildsystem nur vom entsprechenden Inertialsystem aus betrachten muß, von dort sieht es genauso aus, wie das Urbildsystem im ursprünglichen Inertialsystem.

b) **Nicht definierbare Konzepte**:

Es gibt eine Anzahl von Größen, die im Rahmen der Theorie nicht definierbar sind, also auch nicht meßbar sein können. **Unmeßbar** sind: absolute Zeitpunkte, absolute Orte, absolute Richtungen, absolute Geschwindigkeiten. Dies ist unmittelbar einsichtig als Konsequenz der obigen Äquivalenzeigenschaften.

Es sei hier darauf hingewiesen, daß MAXWELL bei der Formulierung seiner Grundgleichungen der Elektrodynamik (1866) das Relativitätsprinzip aufgab, und zwar dadurch, daß er seiner Theorie eine Zeit-Raum-Struktur zu Grunde legte, in der absolute Geschwindigkeiten als meßbare Größen definiert sind. MICHELSON hat daher konsequenterweise den Versuch unternommen, die absolute Geschwindigkeit, der Erde zu messen. Seine experimentellen Ergebnisse zeigten eindeutig, daß MAXWELLS nichtrelativistische Elektrodynamik im Widerspruch zur Erfahrung steht. Dies hat jene tiefe Krise der Physik ausgelöst, die erst 1905 durch EINSTEINS **Spezielle Relativitätstheorie** gelöst wurde.

c) **Die fundamentalen Erhaltungssätze**:

Als Konsequenz des galileischen Relativitätsprinzips hat jedes abgeschlossene mechanische System **10 Bewegungskonstanten** (Erhaltungsgrößen), *d.h.* Meßgrößen, die im Laufe der Zeit ungeändert bleiben. Diese sind den einzelnen Typen von Galileiabbildungen in folgender Weise zugeordnet:

Symmetrieabbildung	**Bewegungskonstante**	**Symbol**
räumliche Translationen	Gesamt-Impuls	$\vec{P}$
zeitliche Translationen	Gesamt-Energie	E
Drehungen	Gesamt-Drehimpuls	$\vec{L}$
Transvelozitationen	Schwerpunktsatz	$\vec{G}$

Der allgemeine Beweis dieser Erhaltungssätze wird nach der Entwicklung geeigneter mathematischer Methoden gegeben werden. Als Beispiele werden im nächsten Abschnitt die einfachsten abgeschlossenen Systeme, die 2-Teilchensysteme elementar behandelt. Es ist ein wunderbarer Zufall, daß das KEPLERsche 2-Körpersystem (Sonne-Planet) elementar vollständig lösbar ist. Ohne diesen Zufall hätte die newtonische Mechanik wohl nicht so rasch ihren Siegeszug angetreten.

4.8 2-Teilchensysteme mit Galileisymmetrie

Die 2 Massenpunkte $(m_1, q^1), (m_2, q^2)$ beschreiben wir in einer galileischen Karte (x^a) mit der Bezeichnung

$$q^{a1} := x^a \circ q^1, \qquad q^{a2} := x^a \circ q^2 \tag{4.50}$$

Wir wählen die Kurven in der Parametrisierung $q^{01}(s) = q^{02}(s) = s$; die räumlichen Komponenten der Geschwindigkeitsvektoren sind also
$u^{k1}(s) = \dot{q}^{k2}(s)$, $u^{k2}(s) = \dot{q}^{k2}(s)$.

Die Kräfte, welche die 2 Teilchen aufeinander ausüben, sollen aus einem Potential $V(r)$ ableitbar sein; r ist der instantane Abstand der Teilchen:

$$r := \sqrt{\sum_{k=1}^{3}(q^{k1} - q^{k2})^2} \tag{4.51}$$

Daß V nur vom Abstand der Teilchen abhängt und nicht von allen 6 Lagekoordinaten ist eine Folge der Galileisymmetrie der Wechselwirkung.

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$m_1\ddot{q}^{k1} = -\frac{\partial}{\partial q^{k1}}V, \qquad m_2\ddot{q}^{k2} = -\frac{\partial}{\partial q^{k2}}V \tag{4.52}$$

Für die Komponenten des Gesamtimpulses des Systems

$$P^k := \langle I^k, p^1\rangle + \langle I^k, p^2\rangle = m_1\dot{q}^{k1} + m_2\dot{q}^{k2} \tag{4.53}$$

folgt durch Addieren der Bewegungsgleichungen, wegen $\frac{\partial V}{\partial q^{k1}} + \frac{\partial V}{\partial q^{k2}} = 0$, $\dot{P}^k = 0$, also der

Erhaltungssatz für den Gesamt-Impuls: $P^k = const.$

Man sieht, daß dieser bereits unter der Voraussetzung folgt, daß V nur von den Differenzen $q^{k1} - q^{k2}$ abhängt, oder anders ausgedrückt, wenn V translationsinvariant ist, d. h. $V(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = V(\vec{q}_1 + \vec{c}, \vec{q}_2 + \vec{c})$.

Für die Komponenten des Gesamtmassenmomentes des Systems

$$G^k := \langle K^{k0}, p^1\rangle + \langle K^{k0}, p^2\rangle = m_1 q^{k1}(s) + m_2 q^{k2}(s) - sP^k \tag{4.54}$$

folgt unmittelbar $\dot{G}^k = 0$, *d.h.* es gilt der Schwerpunktsatz oder

der Satz über die Bewegung des Massenzentrums:
$G^k = MA^k = const.$
wobei $M := m_1 + m_2$ die **Gesamtmasse** des Systems ist.

Mit der Definition der Ortskoordinaten des Massenzentrums (11.5)

$$Q^k := [G^k + sP^k]/M \tag{4.55}$$

folgt also für die Ortskoordinaten des Massenzentrums die Lösung:

$$Q^k(s) = A^k + \frac{s}{M}P^k, \qquad A^k \,\epsilon\, \mathbb{R} \tag{4.56}$$

Für das Weitere definiert man die Relativkoordinaten und die Komponenten des Relativimpulses:

$$q^k(s) := q^{k1}(s) - q^{k2}(s), \qquad p^k(s) := (m_2 p^{k1} - m_1 p^{k2})/M \tag{4.57}$$

$p^k = m\dot{q}^k(s)$, wobei $m := m_1 m_2/M$ die **reduzierte Masse** ist.

Die Orts- und Impulsvariablen der beiden Teilchen ergeben sich als

$$q^{k1} = Q^k + \frac{m_2}{M}q^k, \qquad q^{k2} = Q^k - \frac{m_1}{M}q^k \tag{4.58}$$

$$p^{k1} = \frac{m_1}{M}P^k + p^k, \qquad p^{k2} = \frac{m_2}{M}P^k - p^k \tag{4.59}$$

Es bleibt noch die Aufgabe, die 3 Funktionen $q^k(s)$ zu berechnen aus den 3 Gleichungen

$$m\ddot{q}^k = -\frac{\partial}{\partial q^k}V = -\frac{q^k}{r}V'(r) \tag{4.60}$$

Dies ist effektiv ein 1-Teilchen Problem, das schon in (14.17) gelöst wurde.

Die Komponenten des Gesamtdrehimpulses des Systems folgen als

$$L^{ik} := \langle K^{ik}, p^1) + \langle K^{ik}, p^2) = Q^i P^k - Q^k P^i + W^{ik} \tag{4.61}$$

wobei $W^{ik} := m(q^i\dot{q}^k - q^k\dot{q}^i)$ die Komponenten des Eigendrehimpulses des Systems sind. Der Rest sind die Komponenten des Bahndrehimpulses des Massenzentrums relativ zum Inertialsystem $\{x^a\}$. Durch Wahl des Ruhesystems $\vec{P} = 0$ können die letzteren zu 0 gemacht werden.

Aus den Relationen $\dot{Q}^k = \frac{1}{M}P^k$ folgen unmittelbar die Gleichungen
$Q^i P^k - Q^k P^i = const.$

Wir zeigen nun, daß die Komponenten des Eigendrehimpulses Bewegungskonstanten sind, falls V nur von r abhängt:

$$\dot{W}^{ik} = (q^i\ddot{q}^k - q^k\ddot{q}^i) = -\frac{V'}{r}(q^i q^k - q^k q^i) = 0 \tag{4.62}$$

wobei (4.77) benützt wurde; d. h. der Erhaltungssatz für die W^{ik} hängt von der Drehsymmetrie des Potentials ab.

Auf Grund der Relationen $(W^{23}, W^{31}, W^{12}) = (w^1, w^2, w^3)$ schreibt man den

Erhaltungssatz des Eigendrehimpulses: $\vec{w} = const.$

Für die 3-dimensionale Kurve $q^i(s)$ folgen daraus gem. (4.29) die 2 Sätze:
a) Die Kurve bleibt in einer Ebene. b) Es gilt der Flächensatz.

Der **Erhaltungssatz der Eigenenergie**:

Die Eigenenergie ϵ des 2-Teilchen Systems ist definiert als

$$\epsilon := k + V(r) \tag{4.63}$$

dabei ist k die in (3.26) definierte kinetische Eigenenergie des Systems.

Aus (4.74) ergibt sich $k = \frac{m}{2}\dot{q}^k\dot{q}^k$, woraus die Galileiinvarianz von k unmittelbar ersichtlich ist. Da auch das Potential eine galileiinvariante Funktion ist, $V(q^1, q^2) = V(\hat{q}^1, \hat{q}^2)$, ist auch die Eigenenergie ϵ eine galileiinvariante, das System charakterisierende Größe.

Aus $\epsilon = \frac{m}{2}\dot{q}^k\dot{q}^k + V(r)$ folgt mittels (4.77) $\dot{\epsilon} = 0$, dies ist der

Erhaltungssatz der Eigenenergie: $\epsilon = const.$

Die Eigenenergie des Systems setzt sich additiv zusammen aus dem kinetischen Anteil k und dem Lageanteil V (Energie der Lage), der vom Abstand der beiden Teilchen abhängt. Dafür ist auch die Bezeichnung potentielle Energie üblich, was eigentlich potentielle kinetische Energie bedeutet.

Hier ist die Bemerkung angebracht, daß die Natur der Lageenergie in der Mechanik mysteriös bleibt. Es ist nicht möglich diese räumlich zu lokalisieren; auch hat sie keinen materiellen Träger. In der Elektrodynamik werden diese Rätsel für den Fall elektromagnetischer Kräfte gelöst, dort gibt es eine lokale Energiedichte der Fotomaterie.

Für die Gravitationskraft bleibt das Rätsel bis heute bestehen und stellt für einige Physiker ein zentrales Problem der Allgemeinen Relativitätstheorie dar.

Kapitel 5

Aufgaben zur Mechanik

5.1 Grundlagen

1.) Die Weltlinien 2-er Teilchen dargestellt in 2 Karten.

Seien $\{t,\ x,\ y,\ z\}$ und $\{\bar{t},\ \bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}\}$ 2 globale **Karten der Zeit-Raum-Mannigfaltigkeit** M. Die Koordinatentransformation laute:

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x + \beta t - \frac{\alpha}{2} t^2, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z; \quad \beta, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Die **Weltlinien** der Teilchen 1, 2 seien dargestellt durch die **Kurven** q_1, q_2; explizite seien diese in der Karte $\{t,\ x,\ y,\ z\}$ gegeben als:

$$q_1^y(s) = 0, \quad q_1^z(s) = 0, \qquad q_2^y(s) = 0, \quad q_2^z(s) = 0.$$

$$q_1^t(s) = s, \quad q_1^x(s) = 0 \ \text{ für } \ s \leq 0, \quad q_1^x(s) = -2\beta s + \frac{\alpha}{2} s^2 \ \text{ für } \ s \geq 0,$$

$$q_2^t(s) = s, \quad q_2^x(s) = \gamma - \beta s + \frac{\alpha}{2} s^2$$

wobei $-\infty < s < \infty$.

a) Zeichnen Sie die beiden Weltlinien im $\{t,\ x\}$ und im $\{\bar{t},\ \bar{x}\}$ – Diagramm. Kann man auf Grund der vorliegenden Information sagen, welches Teilchen wo welche **Beschleunigung** hat? Welchen **instantanen Abstand** die 2 Teilchen haben?

Sei nun $\{t,\ x,\ y,\ z\}$ eine **galileische Karte** (inertiales Koordinatensystem)

b) Geben Sie nun zunächst eine verbale Beschreibung der Bewegungsabläufe der 2 Teilchen und eine physikalische Realisierungsmöglichkeit dafür.

c) Berechnen Sie den instantanen Abstand der 2 Teilchen zu einer beliebigen Zeit.

d) Berechnen Sie zu einer beliebigen Zeit die Relativgeschwindigkeiten der Teilchen relativ zu beiden Bezugssystemen.

e) Berechnen Sie zu einer beliebigen Zeit die Beschleunigungen der 2 Teilchen (relativ zu beiden Bezugssystemen).

5.2 1-Teilchen Bewegungen

2) Pendel in einem homogenen Schwerefeld

An einer starren (masselosen) Stange ist am einen Ende ein kleiner Körper der Masse m befestigt, das andere Stangenende ist frei drehbar in einem **unbeschleunigten Aufhängelager** fixiert; das Ganze befindet sich in einem homogenen Schwerefeld der Stärke $g = 10N/kg$. Das Pendel schwinge in einer Ebene; die Winkelamplitude sei φ_0

a) Schreiben Sie den Energiesatz für den Pendelkörper an.

b) Berechnen Sie die Kraft $f_{el}(\varphi)$, welche die Stange beim Auslenkungswinkel φ auf den Körper ausübt. Wo herrscht Zug, wo Druck?

c) Berechnen Sie die Schwingungsdauer des Pendels in der Näherung genügend kleiner Amplitude. Präzisieren Sie den Ausdruck "genügend klein".

3) Die Richtung eines Lots

Die Erde sei als gleichmäßig rotierende Kugel angenommen mit einer drehinvarianten Massendichte; der Schwerpunkt der Erde sei unbeschleunigt, in 24 h mache sie 1 Umdrehung.

Bei der geographischen Breite γ steht ein Galgen, an diesem hängt ein Körper der Masse m (kleine Bleikugel) in Ruhe relativ zur Erde (Lot).

DATEN:
Erdradius = 6380 km, Spezifische Schwerkraft $g = 10\ N/kg$,
$\omega = 2\pi/T = 2\pi/86400 = 7,3.10^{-5}/sec$

a) Welche Kraft $\vec{f}$ wirkt auf den Körper? Wie kommt sie zustande? Welcher Kraftanteil hängt von der geographischen Breite ab?

b) Berechnen Sie den Winkel δ zwischen der Lotrichtung und der Verbindungslinie Körper-Erdmittelpunkt.

c) Beschreiben Sie qualitativ die Bewegung eines Foucault-Pendels.

4) Bewegung relativ zu einer rotierenden Scheibe.

Eine Scheibe rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse, die senkrecht zur Scheibe durch deren Mittelpunkt geht; der Mittelpunkt sei unbeschleunigt. Mit der Scheibe sei das **Z-angepaßte euklidische Koordinatensystem** (t, x, y, z) verbunden (Drehachse = z-Achse).

Auf der Scheibe bewege sich ein Teilchen der Masse m mit konstanter Relativgeschwindigkeit β auf das Drehzentrum zu.

a) Berechnen Sie die Komponenten a^x, a^y, a^z des Beschleunigungsvektors $\vec{a} = a^x\partial_x + a^y\partial_y + a^z\partial_z$ des Massenpunktes.

b) Erklären Sie, welche Kraftkomponenten auf den Massenpunkt wirken müssen, damit diese Bewegung zustande kommt.
Erklären Sie mittels dieser Problemlösung das "Andrängen" des Rheins an den Schwarzwald; und der Wolga an die Wolgaschwelle.

c) Konkrete Aufgabe: 300 km südlich vom Nordpol fließt ein Fluß in Richtung 30^o NO. Die Strömungsgeschwindigkeit ist 2 $msec^{-1}$, der Fluß hat eine Breite von 50 m.

a) Um wieviel höher ist die Wasseroberfläche am Ostufer als am Westufer?

b) Wie groß ist das Druckgefälle in Flußrichtung?

* Zusatzfrage: Was ist “Coriolis-Scheinkraft“?

5) Pendel auf rotierender Scheibe.

Sei $\{t,\ x,\ y,\ z\}$ eine galileische Karte (inertiales Koordinatensystem) der Zeit-Raum-Mannigfaltigkeit M; $\{\bar{t},\ \bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}\}$ sei das Koordinatensystem einer um die z-Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe. Auf der Scheibe sei im Abstand b vom Zentrum ein Zapfen montiert, um den sich an einer starren (masselosen) Stange der Länge l ein Teilchen der Masse m reibungsfrei drehen kann. Eine Kurve $q : \mathbb{R} \to M : s \mapsto q(s)$, die die Weltlinie des Teilchens beschreibt, läßt sich vollständig durch die Funktion $\varphi(s)$ ausdrücken.

Wir wählen: $\quad q^t(s) = s, \quad q^z(s) = 0.$

a) Zeigen Sie:

$$q^x(s) = b\ \cos\omega s + l\ \cos(\omega s + \varphi(s)), \quad q^y(s) = b\ \sin\omega s + l\ \sin(\omega s + \varphi(s))$$

b) Berechnen Sie relativ zu beiden Bezugssystemen die Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Teilchens: $v^{\bar{x}}(s),\ v^{\bar{y}}(s),\ v^{\bar{z}}(s)$; $v^x(s),\ v^y(s),\ v^z(s)$; $\quad a^{\bar{x}}(s),\ a^{\bar{y}}(s),\ a^{\bar{z}}(s)$; $\quad a^x(s),\ a^y(s),\ a^z(s)$.

c) Berechnen Sie die Kraft, welche die Stange auf das Teilchen ausübt.

Lösung: $\quad f = -m\,[l(\omega + \dot{\varphi})^2 + \omega^2\, b\, \cos\varphi] \quad$ (Zugkraft)

Für $\varphi > \frac{\pi}{2}$ kann $f > 0$ werden, d.h. Schubkraft in Stangenrichtung.

Aus der Bewegungsgleichung $\quad \ddot{\varphi} = -\frac{\omega^2 b}{l} \sin\varphi \quad$ folgt der Erhaltungssatz

$$\dot{\varphi}^2 - \frac{2b\omega^2}{l} \cos\varphi = \text{ const.}$$

damit kann $\dot{\varphi}$ aus f eliminiert werden, also $f(\varphi)$ ermittelt werden.

* Zusatzfrage: Was bedeutet diese Erhaltungsgröße physikalisch?

6) Bewegung unter der Einwirkung von 3 Teil-Kräften: Federkraft, Luftwiderstand und Erregungskraft.

Sei (t, x, y, z) eine galileische Karte von M. Wir wählen für die Kurve q die zeitangepaßte Parameterisierung $q^t(s) = s$; die Bewegungsgleichung für $q^x(s) \equiv q(s)$ laute:

$$m\ddot{q} = -kq - 2\lambda\dot{q} + A\theta(s)\ \sin\nu s$$

Wie sind die 3 Anteile auf der rechten Seite physikalisch zu interpretieren?

a) Bestimmen Sie die Lösung für $-\infty < s < \infty$ zu den Anfangsdaten:

$q(0) = a, \quad \dot{q}(0) = b.$

b) Diskutieren Sie den Fall der Resonanz.

Literatur: Schaum p. 87-90, oder Kotkin u. Serbo p. 14. Matlab-“Oszill“.

7) Kepler-Bewegung.

Sei $\{t, x, y, z\}$ eine galileische Karte der Zeit-Raum-Mannigfaltigkeit M. Die Weltlinie eines Teilchens sei dargestellt durch die Kurve

$q : I \to M : \tau \mapsto q(\tau)$ mit der Kartendarstellung

$$q^t(\tau) = \tau - \frac{e}{\omega a}\sin\omega\tau, \quad q^x(\tau) = a\cos\omega\tau - e, \quad q^y(\tau) = b\sin\omega\tau$$

$$q^z(\tau) = 0, \qquad \text{wobei} \quad a := \sqrt{e^2 + b^2}, \; e, b \in \mathbb{R}$$

(Der Zeitparameter τ heißt Keplerzeit. Die Weltlinie ist eine elliptische Schraubenlinie; die Bahn ist deren Projektion auf den instantanen Raum $t = 0$, sie ist eine Ellipse.)

a) Berechnen Sie den Relativgeschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ und den Beschleunigungsvektor $\vec{a}$

$$\vec{v} = v^x(\tau)\partial_x + v^y(\tau)\partial_y + v^z(\tau)\partial_z, \qquad \vec{a} = a^x(\tau)\partial_x + a^y(\tau)\partial_y + a^z(\tau)\partial_z$$

Zeichnen Sie eine Skizze der Bahn einschließlich $\vec{v}$ und $\vec{a}$.

c) Berechnen Sie in einem allgemeinen Punkt der Bahn die kinetische Energie E_{kin} und die Lageenergie $E_{lage} := -\frac{\alpha}{r}$ $(\alpha := m\omega^2 a^3)$.

Zeigen Sie, daß die Energie $E := \frac{m}{2}\vec{v}^2 - \frac{\alpha}{r}$ eine Bewegungskonstante ist.

d) Berechnen Sie die Komponenten des Drehimpulses des Teilchens bezüglich O:

$$l^3(\tau) := m[q^x(\tau)v^y(\tau) - q^y(\tau)v^x(\tau)], \quad l^1 = ..., \quad l^2 = ...$$

und zeigen Sie den Flächensatz: $l^3 = const. = m\omega ab.$

e) Stellen Sie die Keplerbahnen in Polarkoordinaten $\{r, \varphi\}$ dar.
Lösung:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \frac{e}{a}\cos\varphi}, \quad \text{wobei} \quad p = a - \frac{e^2}{a} = \frac{l^2}{m\alpha}$$

* f) Zeigen Sie: der LAPLACE-RUNGE-LENZ-Vektor $\vec{A} := \vec{v} \times \vec{l} - \frac{\alpha}{r}\vec{q}$ ist eine Bewegungskonstante.

8) Hyperbolische Bahnen im abstoßenden Coulomb-Feld: RUTHERFORD-Streuung.

Ein α-Teilchen mit Ladung 2e streut an einem schweren Atomkern mit Ladung Ze. Die auf das Teilchen einwirkende Coulombkraft hat das Potential

$$V(r) = \frac{C}{r}, \qquad C := \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Aus großer Entfernung laufe ein α-Teilchen (Masse m) mit asymptotischer Geschwindigkeit v_0 (Energie $E = \frac{mv_0^2}{2}$) und Stoßparameter b auf den Kern der Masse $M (M \gg m)$ zu. Als Lösung der Bewegungsgleichung ergibt sicht die Weltlinie des Teilchens aus der Kurve q , die in einer galileischen Karte (t, x, y, z) die folgende Darstellung hat:

$$q^t(s) = s + \frac{e}{a\omega} \cdot sh(\omega s), \quad q^x(s) = e + a \cdot ch(\omega s), \quad q^y(s) = b \cdot sh(\omega s)$$

wobei $a := \frac{C}{mv_0^2}, \quad \omega := \frac{v_0}{a}, \quad e^2 := a^2 + b^2.$

In Polarkoordinaten (t, r, ϕ, z) erhält man die Darstellung:

$$q^r(s) = a + e \cdot ch(\omega s), \quad q^\phi(s) = arcos\frac{e + a \cdot ch(\omega s)}{a + e \cdot ch(\omega s)}, \quad q^z(s) = 0.$$

a) Zeigen Sie, daß der Streuwinkel ϑ bestimmt ist zu $\cot\frac{\vartheta}{2} = \frac{2Eb}{C}$.

Wirkungsquerschnitt(Rutherfordquerschnitt)

Der Streuversuch wird sehr oft ausgeführt; dabei sollen alle Stoßparameter b im Bereich $0 \leq b \leq R$, und alle Azimutwinkel φ gleich häufig vorkommen. Insgesamt sollen N-Teilchen pro m^2 einfallen.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der α-Teilchen, die in das Raumwinkelelement $d\Omega := sin\vartheta \; d\vartheta \; d\varphi$ gestreut werden. Lösung:

$$dn = N.f(E, \vartheta) d\Omega$$

wobei $f(E, \vartheta) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega}$ der differentielle Wirkungsquerschnitt für RUTHERFORD-Streuung ist :

$$f(E, \vartheta) = (\frac{C}{2E})^2 \frac{1}{4\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$$

c) Diskutieren Sie, auf welche Meßdaten RUTHERFORD die Aussage gründete, daß Atomkerne eine Ausdehnung von (ca.) $10^{-13} cm$ haben.

9) Geladenes Teilchen in einem homogenen Magnetfeld

Sei (t,x,y,z) eine galileische Karte. Das Magnetfeld sei gegeben durch den Kartenausdruck:

$\vec{B} = B\partial_z$, mit $B =$ const. Ein Teilchen mit Masse m, Ladung e bewege sich unter der Einwirkung der Lorentzkraft $\vec{f} = e\vec{v} \times \vec{B}$.

Zeigen Sie, daß die Weltlinie des Teilchens durch folgende Kurve dargestellt werden kann:

$$q^t(s) = s, \quad q^x(s) = a + Rcos(\omega s), \; q^y(s) = b + Rsin(\omega s), \; q^z(s) = c + vs$$

wobei $\omega := \frac{eB}{m}$ Zyklotronfrequenz) und a, b, c, R, v Konstanten sind (Anfangsdaten).

5.3 Ein 3-Teilchen-System mit Wechselwirkung

10) 3 Teilchen in Wechselwirkung: gekoppelte Schwingungen

Sei $\{t, x, y, z\}$ eine galileische Karte, die Bewegung der Teilchen 1,2,3 erfolge längs der x-Achse. Wir wählen zeitangepaßte Parameterisierung:

$q_1^t(s) = q_2^t(s) = q_3^t(s) = s.$

Dann lauten die Bewegungsgleichungen für die $q_\alpha^x(s) \equiv q_\alpha(s)$:

$$m_1 \ddot{q}_1 = k\,[q_2 - q_1 - l]$$

$$m_2 \ddot{q}_2 = \bar{k}\,[q_3 - q_2 - \bar{l}] - k\,[q_2 - q_1 - l]$$

$$m_3 \ddot{q}_3 = -\bar{k}\,[q_3 - q_2 - \bar{l}]$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen.

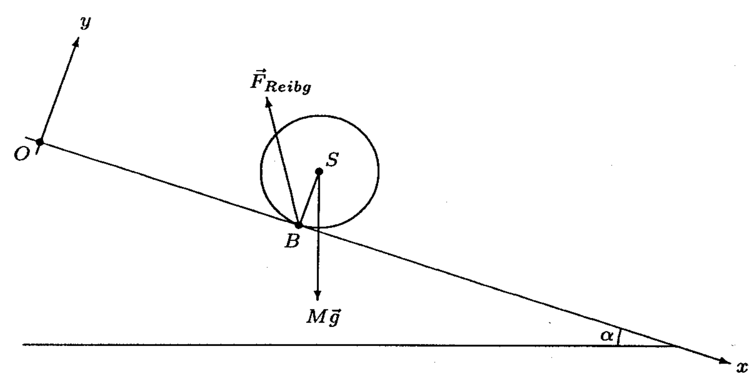
b) Zeigen Sie, daß für dieses 3-Teilchen-System die von der Galileigruppe erzeugten Bilder einer Lösung stets auch eine Lösung sind. (**Galileisymmetrie der Dynamik**.)

c) Zeigen Sie für dieses abgeschlossene 3-Teilchen-System die Erhaltungssätze für Energie, Impuls und den Schwerpunktsatz.

5.4 Bewegung eines starren Körpers

11) Rollbewegung im homogenen Schwerefeld.

Ein homogener Zylinder mit Radius R, Masse M rollt im homogenen Schwerefeld der spezifischen Stärke $g = 10N/kg$ eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel α hinunter. (siehe Skizze). Das Trägheitsmoment I des Zylinders bezüglich seiner Achse ist bekanntlich $I = MR^2/2$.



a) Stellen Sie den Energiesatz für die Rollbewegung auf und bestimmen Sie daraus die Geschwindigkeit des Zylinderschwerpunktes als Funktion der Fallhöhe h.

b) Erklären Sie die neben der Skizze angegebenen Werte für die Reibungskraft F_{Reibg}, die die Unterlage auf den Zylinder im Auflagepunkt ausübt.

$$F^y_{Reibg} = Mg\cos\alpha$$

$$F^x_{Reibg} = -\frac{Mg\sin\alpha}{1+\frac{MR^2}{I}}$$

12) Was ist das Relativitätsprinzip?

Erklären Sie die Bedeutung der folgenden Sätze:

Die galileirelativistische ("nichtrelativistische") **Mechanik** und die galileirelativistische ("nichtrelativistische") **Quantenmechanik** haben den **newtonischen Zaum** als Basis. Beide Theorien beschreiben die Materie **demokritisch**.

Die Galileigruppe ist Isometriegruppe (Symmetriegruppe) des newtonischen Zaumes. Diese Aussage ist der geometrische Teil des **galileischen Relativitätsprinzips**.

Der dynamische Teil des galileischen Relativitätsprinzips ist die Forderung, daß die Galileigruppe auch Symmetriegruppe der dynamischen Gleichungen sein soll. Mechanische Systeme, die dem galileischen Relativitätsprinzip genügen, sind abgeschlossene Systeme mit galileiinvarianten Wechselwirkungspotentialen. Einfachstes Beispiel ist ein 2-Teilchensystem mit Potential V(r).

Einsteinrelativistische ("relativistische") Theorien sind auf der Basis des **minkowskischen Zaumes** formuliert. Die Poincaregruppe ist Isometriegruppe (Symmetriegruppe) dieses Zaumes. Wichtigster Unterschied zum newtonischen Zaum ist die Existenz einer endlichen Grenzgeschwindigkeit ($c = 3.10^8 m/sec$).

Das **einsteinische Relativitätsprinzip** ("spezielle" Relativitätsprinzip) enthält als dynamischen Teil die Forderung, daß die Poincaregruppe auch Symmetriegruppe der dynamischen Gleichungen sein soll. Das wichtigste Beispiel für eine solche Theorie ist die **Einstein-Minkowskische Fotodynamik**, das ist jene Theorie, welche die **nichtrelativistische Maxwell-Hertz**sche Theorie für freie Fotomaterie abgelöst hat.