Quantentheorie des Lichtes

Wir gehen aus von der klassischen Feldgleichung für Fotofelder $V = V_\nu(x)dx^\nu$:

$$-d * dV + \kappa^2 * V = \frac{1}{c\epsilon_0} J \tag{1}$$

wobei die Ladungs-Strom-3-Form $J = j \lrcorner E$ dem Gesetz der Ladungserhaltung $dJ = 0$ genügen muß. Aus (1) folgt damit die Gleichung $d * V = 0$. Wir bezeichnen $\sharp V = V^\nu(x)\partial_\nu$

In einer minkowskischen Karte hat man also die Gleichungen:

$$(\Box + \kappa^2)V^a(x) = \frac{1}{c\epsilon_0} j^a(x), \qquad V^a_{,a} = 0 \tag{2}$$

Es genügt zunächst, einen Fall mit einem gegebenen Stromdichtefeld $j = j^a(x)\partial_a$ zu betrachten. Man sieht, dass nur die 6 Felder $V^k, P^i := V^i_{,0}$ unabhängige Variable sind, deren Anfangswerte frei vorgebbar sind; V^0 ist eine davon abhängige Größe:

$$V^0(x^0, \vec{x}) = \int d^3x' \frac{exp(-\kappa|\vec{x} - \vec{x}'|)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} [P^k_{,k}(x^0, \vec{x}') + \frac{1}{c\epsilon_0} j^0(x^0, \vec{x}')]$$

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (2) lautet:

$$V^a(x) = V^a_{ein}(x) + \frac{1}{c\epsilon_0} \int d^4x' G_{ret}(x - x') j^a(x') \tag{3}$$

wobei V_{ein} die allgemeine Lösung der homogenen Gleichungen (2) ist:

$$V^a_{ein}(x) = \sum_s \int \frac{d^3k}{2\bar{\omega}} \{\alpha(\vec{k}, s)\epsilon^a(\vec{k}, s) \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} + cc.\}, \ \bar{\omega} := \sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2} \tag{4}$$

Berechnet man die Energie $\mathcal{E}$ des freien Strahlungsfeldes V_{ein} , erhält man:

$$\mathcal{E} = \sum_s \int \frac{d^3k}{2\bar{\omega}} \cdot \hbar\omega \cdot \frac{\epsilon_0}{\hbar c} \alpha^*(\vec{k}, s)\alpha(\vec{k}, s) \tag{5}$$

Mit der **Einstein-Hypothese**, dass für quasimonofrequente Fotowellen $\hbar\omega$ die "Energie 1 Photons" ist, schließt man aus (5), daß die Photonenanzahl N gegeben ist durch:

$$N = \sum_s \int \frac{d^3k}{2\bar{\omega}} a^*(\vec{k}, s)a(\vec{k}, s), \quad \text{wobei} \quad a(\vec{k}, s) := \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\hbar c}} \alpha(\vec{k}, s) \tag{6}$$

Zur Quantisierung erhebt man nun die $a(\vec{k},s)$ zu Operatoren in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Der Operator N gemäß Gleichung (6) soll nun mit den Operatoren a^+, a die folgenden Vertauschungsrelationen erfüllen, die ausdrücken, daß a ein Photon "vernichtet" bzw. a^+ ein Photon "erzeugt":

$$[N, a^+(\vec{k},s)] = a^+(\vec{k},s), \quad [N, a(\vec{k},s)] = -a(\vec{k},s) \tag{7}$$

Dies wird erreicht, wenn man die Vertauschungsrelationen fordert:

$$[a(\vec{k},s), a^+(\vec{k}',s')] = 2\bar{\omega}\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')\delta_{ss'} \tag{8}$$

Damit werden nun die $V_a(x)$ zu Feldoperatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$.

Wir betrachten hier den Fall, daß $j^a(x)$ eine klassische Stromdichte ist (c-Zahl Quelle). Aus (3) und (8) folgen dann für die Photonen-Feldoperatoren die Vertauschungsrelationen:

$$i\frac{\epsilon_0}{\hbar c}[V_a(x), V_b(y)] = (-\eta_{ab} - \frac{1}{\kappa^2}\partial_a\partial_b)D(x-y;\kappa^2) \tag{9}$$

mit der Paulischen Kommutatordistribution

$$D(x) := \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\bar{\omega}}\{e^{-ikx} - e^{ikx}\}, \qquad (\partial_0 D)(0,\vec{x}) = \delta^3(\vec{x}) \tag{10}$$

Für die Feldoperatoren $V_k(x)$ und die "konjugierten" Impuls-Feldoperatoren $P_k(x) := V_{k,0}(x)$ folgen damit für die unabhängigen lokalen Feldoperatoren die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen:

$$i\frac{\epsilon_0}{\hbar c}[P_k(t,\vec{x}), V_l(t,\vec{y})] = (\delta_{kl} - \frac{1}{\kappa^2}\partial_k\partial_l)\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{11}$$

Daß diese Relationen nicht ganz "kanonisch" nach dem Muster $\frac{i}{\hbar}[P,Q] = I$ aussehen, liegt daran, daß P_k nicht "kanonisch konjugiert" zu V_k ist. Der "kanonisch konjugierte" Feldoperator lautet:

$$\Pi_k := \frac{\epsilon_0}{c}(V_{k,0} - V_{0,k}) \tag{12}$$

Damit erhält man die "kanonischen Vertauschungsrelationen"

$$\frac{i}{\hbar}[\Pi_k(t,\vec{x}), V_l(t,\vec{y})] = \delta_{kl}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{13}$$

Man hat davon aber weniger, weil die Π_k den abhängigen Feldoperator V_0 enthalten, und damit selbst keine unabhängigen Variablen sind; die P_k hingegen sind unabhängige Feldvariablen.

Der Grenzfall $\kappa \to 0$

Die Erfahrung zeigt, daß die Photonmasse κ sehr sehr klein ist; wie geht man denn da mit den fundamentalen Vertauschungsrelationen (11) in der Praxis um? Man kann darin ja nicht $\kappa = 0$ setzen?

Dass der Grenzfall $\kappa \to 0$ besonders sorgfältig zu behandeln ist, zeigt sich schon beim klassischen Problem der Lichtausstrahlung durch einen gegebenen Strom j. Der longitudinale Polarisationsvektor lautet

$$\epsilon^a(\vec{k}, L) = \frac{1}{\kappa|\vec{k}|}(\vec{k}^2, \bar{\omega}\vec{k}) \tag{14}$$

Dazu ergibt sich die longitudinale Amplitude

$$\alpha_{aus}(\vec{k}, L) = \frac{i}{c\epsilon_0(2\pi)^{3/2}} \frac{\kappa}{\bar{\omega}} \frac{\vec{k}\vec{j}(\bar{\omega}, \vec{k})}{|\vec{k}|} \tag{15}$$

dabei ist $\alpha_{aus}(\vec{k}, L)$ wie in Gleichung (4) definiert.

Man sieht: Für $\kappa \to 0$ geht $\alpha_{aus}(\vec{k}, L) \to 0$, und damit geht nach (5) auch die Energie des longitudinalen Feldanteiles gegen 0, aber wegen

$$\alpha_{aus}(\vec{k}, L) \cdot \epsilon^a(\vec{k}, L) \to \frac{i}{c\epsilon_0(2\pi)^{3/2}} \frac{\vec{k}\vec{j}(\bar{\omega}, \vec{k})}{|\vec{k}|} \frac{1}{|\vec{k}|} (\frac{\vec{k}^2}{\bar{\omega}}, \vec{k}) \neq 0 \tag{16}$$

wird der Longitudinalteil des Fotofeldes V nicht null. Der Longitudinalteil geht für $\kappa = 0$ zwar nicht in das Faradayfeld $F = dV$ ein, aber in einer vollständigen Elektro-Foto-Dynamik spielt das Fotofeld V die fundamentale Rolle; dieses geht z. B. in die Schrödingergleichung ein.

Wenn man Elektromaterie vollständig dynamisch beschreibt, wird auch $j^a(x)$ ein Operatorfeld, das die fundamentalen dynamischen Feldoperatoren der Elektromaterie enthält; für diese kommen weitere Vertauschungsrelationen hinzu. Dies wird im Kapitel Foto-Psi - Dynamik dargestellt. Beschreibt man insbesondere Elektronen durch ein Diracfeld ψ, dann ist $j^a = \bar{\psi}\gamma^a\psi$.

Für $\kappa \to 0$ entkoppeln also die longitudinalen Polarisationsfreiheitsgrade der Photonen energetisch; es bleiben nur die transversalen übrig (schnelle Photonen sind transversal), diese aber enthalten das Problem mit den

$1/\kappa$-Termen nicht. Schrödinger hat schon in den 1940-er Jahren gezeigt, daß der Grenzübergang kontinuierlich verläuft.

Zur Abspaltung der problematischen Longitudinalanteile des Photonenfeldes V benutzt man ein Verfahren, das in der Literatur als “Quantisierung in Coulombeichung“ bezeichnet wird. (Siehe z.B. Bjorken - Drell, oder Cohen-Tannoudji et al. Photons and Atoms):

Man zerlegt das Photonenfeld in 2 Anteile:

$$V_a = C_a + L_{,\,a}, \qquad \text{“Transversalteil“ + “Longitudinalteil“} \tag{17}$$

wobei der Feldanteil C_a der folgenden Bedingung unterworfen wird:

$$[(n^a n^b - g^{ab})C_b]_{,\,a} = 0, \qquad \text{“Coulombeichung“ genannt;} \tag{18}$$

dabei ist n ein zeitartiges Parallelfeld, das zu $G(n,n) = 1$ normiert ist. In einem durch n ausgezeichneten Inertialsystem gilt $n = \partial_0$, d.h. darin lautet die Bedingung an C:

$$C^k{}_{,\,k} = 0, \qquad \text{oder} \quad div\vec{C} = 0 \tag{19}$$

Aus Gleichung (14) folgt damit für den longitudinalen Feldanteil L die Gleichung:

$$\Delta L = V_{k,\,k}, \qquad \text{mit der eindeutigen Lösung:} \tag{20}$$

$$L(x^0, \vec{x}) = \int \frac{d^3x'}{4\pi\,|\vec{x} - \vec{x}'|} V^k_{,k}(x^0, \vec{x}') \tag{21}$$

Damit ist aber auch der Feldanteil C_a eindeutig bestimmt zu:

$$C_a(x) = V_a(x) - L_{,\,a}(x) \tag{22}$$

Es wird sich zeigen, dass für $\kappa \to 0$ nur das Feld L ein singuläres verhalten zeigt. Man sieht aber aus (17), dass $L_{,\,a}$ einen “Eichterm“ darstellt; das wird zur Lösung des Problems führen (Siehe Kap. Foto-Psi - Dynamik). Hier sei nur darauf hingewiesen, dass in einer Theorie, in der die Elektromaterie durch Massenpunkte beschrieben wird (Lorentzsche Elektronentheorie), die Kraft durch $u \lrcorner F$ beschrieben wird; in F geht aber L nicht ein: $F = dV = dC$.

Man kann nun anstelle der 3 Felder $V^k(x)$ die 3 Felder $C^k(x)$, $L(x)$ benützen. Aus den Gleichungen (2),(19),(21) erhält man die Feldgleichungen:

$$(\Box + \kappa^2)C^k = \frac{1}{c\epsilon_0} j_t^k \;,\; (\Box + \kappa^2)L = \frac{1}{c\epsilon_0} \int \frac{d^3x'}{4\pi\, |\vec{x} - \vec{x}'|} j^k_{,k}(x^0, \vec{x}') \tag{23}$$

wobei $\vec{j}_t$ die transversale Stromdichte ist, die also $div \vec{j}_t = 0$ erfüllt:

$$j_t^k(x^0, \vec{x}) = j^k(x^0, \vec{x}) + \partial_k \int \frac{d^3x'}{4\pi\, |\vec{x} - \vec{x}'|} j^i_{,i}(x^0, \vec{x}') \tag{24}$$

Das Feld C^0 folgt dann eindeutig aus der Gleichung:

$$(-\Delta + \kappa^2)C^0 = \frac{1}{c\epsilon_0} j^0 - \kappa^2 L_{,0} \tag{25}$$

Für die weitere Diskussion legen wir den einfachen Fall zugrunde, daß die Stromdichte $j^a(x)$ gegeben ist. Die Feldgleichungen (23) definieren im klassischen Fall ein Cauchy-Problem: die 6 Funktionen $C^k(0, \vec{x})$, $C^k_{,0}(0, \vec{x})$, $L(0, \vec{x})$, $L_{,0}(0, \vec{x})$ (Anfangszustand)liefern eine eindeutige Lösung. Nach der Quantisierung des Fotofeldes liefern die Vertauschungsrelationen (9) für die Operatorfelder $C_a(x)$, $L(x)$ die folgenden Kommutatorrelationen:

$$i\frac{\epsilon_0}{\hbar c}[L(x), L(y)] = \frac{1}{\kappa^2} D(x - y; \kappa^2) + M(x - y; \kappa^2) \tag{26}$$

$$i\frac{\epsilon_0}{\hbar c}[L(x), C_a(y)] = n_a(n^b \partial_b) M(x - y; \kappa^2) \tag{27}$$

$$i\frac{\epsilon_0}{\hbar c}[C_a(x), C_b(y)] = -\eta_{ab} D + \partial_a \partial_b M - (n_a \partial_b + n_b \partial_a)(n^c \partial_c) M \tag{28}$$

wobei die Distribution $M(x - y; \kappa^2)$ die Relationen erfüllt:

$$-\Delta M = D, \quad M_{,00} = -D - \kappa^2 M \tag{29}$$

Der explizite Ausdruck für M lautet:

$$M(x; \kappa^2) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\bar{\omega}} \cdot \frac{1}{\vec{k}^2} (e^{-ikx} - e^{ikx}) \tag{30}$$

Man sieht nun, dass nur die Vertauschungsrelation (26) den problematischen Faktor $\frac{1}{\kappa}$ enthält; in den übrigen kann der Limes $\kappa \to 0$ ohne weiteres durchgeführt werden.

Explizite erhält man für die Feldoperatoren $C_a(x)$ die Vertauschungsrelationen:

$$i\frac{\epsilon_0}{\hbar c}[C_0(x), C_0(y)] = \kappa^2 M(x-y), \quad [C_0(x), C_k(y)] = 0 \tag{31}$$

$$i\frac{\epsilon_0}{\hbar c}[C_k(x), C_l(y)] = \delta_{kl} D(x-y) + \partial_k \partial_l M(x-y) \tag{32}$$

Für gleiche Zeiten $x^0 = y^0$ sind alle diese Kommutatoren 0.

Weiters erhält man aus (28) die Vertauschungsrelationen

$$i\frac{\epsilon_0}{\hbar c}[C_{k,0}(x), C_l(y)] = \delta_{kl} D_{,0}(x-y) + \partial_k \partial_l M_{,0}(x-y) \tag{33}$$

Mit den C_k konjugierten Impuls-Feldoperatoren $\tilde{P}_k := C_{k,0}$ folgen daraus für gleiche Zeiten die Vertauschungsrelationen:

$$i\frac{\epsilon_0}{\hbar c}[\tilde{P}_k(x), C_l(y)] = \delta_{kl}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \partial_k \partial_l \frac{1}{4\pi\,|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{34}$$

Wir betrachten nun den Fall $\kappa = 0$ noch etwas weiter. Die Feldgleichung (25) gibt:

$$-\Delta C^0 = \frac{1}{c\epsilon_0} j^0, \text{ d.h. } \quad C^0(x^0, \vec{x}) = \frac{1}{c\epsilon_0}\int \frac{d^3x'}{4\pi\,|\vec{x}-\vec{x}'|} j^0(x^0, \vec{x}') \tag{35}$$

C^0 wird also das instantane Coulombfeld zur Ladungsdichte j^0.

Die Gleichungen (23) für die C^k sind von vorn herein von den anderen entkoppelt; klassisch sind sie für sich ein Cauchy-Problem, das für gegebene Anfangsdaten $C_k(0,\vec{x})$,$C_{k,0}(0,\vec{x})$ eine eindeutige Lösung hat.

Schließlich verbleibt noch die inhomogene Gleichung (23) für das Feld $L(x)$, dieses ist also im allgemeinen ungleich 0.

Für eine eindeutige Lösung der Gleichung $\quad (\Box + \kappa^2)L(x) = I(x) \quad$ ist die Vorgabe der Cauchy-Daten $L(0,\vec{x})$, $L_{,0}(0,\vec{x})$ notwendig und hinreichend. L enthält nur die longitudinalen Polarisationsfreiheitsgrade des Photons (für κ ungleich 0 sind diese aber auch im Feld C^0 enthalten). Wir schreiben die Lösung als:

$$L(x) = L_{ein}(x) + \int d^4x' G_{ret}(x-x') I(x') \tag{36}$$

Das freie Feld $L_{ein}(x)$ hat die Fourierdarstellung

$$L_{ein}(x) = \int \frac{d^3k}{2\bar{\omega}} l(\vec{k}) \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}} + cc \tag{37}$$

Man zeigt, dass die $l(\vec{k})$ mit den Longitudinalamplituden $\alpha_L(\vec{k})$ des Fotofeldes V_{ein} wie folgt zusammenhängen:

$$l(\vec{k}) = \frac{i}{\kappa} \frac{\bar{\omega}}{|\vec{k}|} \alpha_L(\vec{k}) \qquad \alpha_L(\vec{k}) = -i\kappa \frac{|\vec{k}|}{\bar{\omega}} l(\vec{k}) \tag{38}$$

Die Vorgabe von solchen $l(\vec{k})$, die für $\kappa \to 0$ endlich bleiben, führt im Limes also zu $\alpha_L(\vec{k}) = 0$. Berechnet man z.B. das von einer gegebenen Stromdichte ausgestrahlte Fotofeld, dann erhält man

$$l_{aus}(\vec{k}) = -\frac{(2\pi)^{-3/2}}{c\epsilon_0} \frac{\vec{k} \cdot \vec{j}(\bar{\omega}, \vec{k})}{\vec{k}^2} \tag{39}$$

In der Quantentheorie sind die $l(\vec{k})$ jedoch Operatoren; diese genügen den Vertauschungsrelationen

$$[l(\vec{k}), l^+(\vec{k}')] = (\frac{1}{\vec{k}^2} + \frac{1}{\kappa^2}) 2\bar{\omega} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \tag{40}$$

Das Feld L kann in der klassischen Elektronentheorie ignoriert werden, da es in die Feldstärken F nicht eingeht. In einer Feldtheorie der Elektromaterie (Schrödinger-Feld, oder Klein-Gordon-Feld, oder Dirac-Feld) wird es durch eine "Eichtransformation" eliminiert.(Siehe das Kapitel: Foto-Psi - Dynamik). Danach erscheint der Grenzfall $\kappa = 0$ als unproblematisch.

Frage: Ist der Grenzfall $\kappa = 0$ nicht doch problematisch?

Dieser Fall ist tatsächlich problematisch, dies zeigt sich beim

Infrarotproblem

Gibt man z.B. eine klassische Stromdichte vor, und berechnet dazu die Bremsstrahlung, dann ergibt sich auf die Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit w_n werden n Photonen emittiert? die Antwort $w_n = 0$ für jede endliche Zahl n. (trotzdem ist $\sum_n w_n = 1$.) Für ein beliebig kleines aber endliches κ ergibt sich die physikalisch sinnvolle Antwort: Es werden sehr sehr viele, sehr sehr weiche Photonen emittiert.

Nachbemerkung: Die Quantenoptiker beschreiben Elektromaterie (Elektronen, Atome) durch ein quantisiertes Schrödingerfeld ψ, also mit der Schrödingergleichung, die auf der Basis des newtonischen Zaumes formuliert ist. Wie kann das mit der einsteinrelativistischen Photonenfeldgleichung (1) logisch vereinbart werden?

Das kann es, weil die Quantenoptiker die nichtrelativistischen Maxwell-Gleichungen (im Sinne der Äthertheorie)benutzen: Dem newtonischen Zaum $\{\mathcal{M}, Z, h, E, \nabla\}$ wird als weitere geometrische Struktur ein Vektorfeld w hinzugefügt, das den Bedingungen $\langle Z, w\rangle = 1, \nabla w = 0$ genügt. (w wird Ätherfeld genannt). Mit Hilfe der "Weber-Konstante" $c = 3.10^8 msec^{-1}$ wird dann ein Kometrikfeld definiert:

$$g^{\mu\nu} := \frac{1}{c^2} w^\mu w^\nu - h^{\mu\nu} \tag{41}$$

Der *-Operator in Gleichung (1) ist nun mittels (g, E) definiert; und damit kann alles weitere durchgezogen werden. In der Praxis muß man nur die Annahme machen, daß das Laborsystem, für das die Berechnungen durchgeführt werden ein inertiales Ätherruhsystem ist, d.h. daß in der galileischen Karte des Laborsystems (t, x^k) das Ätherfeld die Form hat: $w = \partial_t$.

Das gekoppelte System $\{\psi, V\}$ mit der Schrödingergleichung für das ψ-Feld, in minimaler Kopplung mit dem V-Feld, und die Photonenfeldgleichung (1) im eben erläuterten Sinn bilden eine logisch konsistente, mathematisch wohldefinierte Theorie.

Literatur:

James D. Bjorken, Sidney D. Drell: Relativistische Quantenfeldtheorie

Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc, Gilbert Grynberg: Photons and Atoms