

*Wenn man  $\psi$  als Beschreibung eines Ensembles auffaßt, ergeben sich Aussagen, die denen der statistischen Mechanik entsprechen und gleichzeitig der Quantenstruktur der Realität Rechnung tragen.* EINSTEIN.

## Die Logik der Quantenmechanik

Der Quantenmechanik liegt dieselbe geometrische Raum-Zeit-Struktur zu Grunde wie der klassischen Mechanik: der newtonische Raum ( $M, Z, h, E, \nabla$ ). Die Observablen werden i. A. relativ zu einem galileischen Inertialsystem bestimmt.

Die Quantenmechanik beschreibt

**Elektromaterie als Systeme von unvernichtbaren, unerzeugbaren, ausdehnungslosen Teilchen.**

Es liegt also ein demokritisches Materie-Konzept zu Grunde, dies rechtfertigt die Bezeichnung Quanten-MECHANIK.

Das mathematische Konzept der quantenmechanischen Beschreibung eines Teilchens (designatum) nennen wir **Punktquant** (designans); dieses tritt an die Stelle des Konzeptes *Massenpunkt* der klassischen Mechanik.

Die Quantenmechanik ist eine **probabilistische Theorie**, sie kann also i.A. keine bestimmte Aussage machen über das aktuelle Auftreten eines Einzelereignisses (das Ergebnis einer Einzelmessung), und zwar auch dann nicht, wenn der **Zustand des Punktquants** maximal präpariert ist (ein reiner Zustand vorliegt). Wegen der unaufhebbaren **Unbestimmtheiten** nennt man diese Theorie indeterministisch. In der Sprache der statistischen Mechanik (siehe Bohrmechanik) sagt man: Das einzelne Punktquant sei als Mitglied eines, durch den Zustand charakterisierten, "Ensembles" aufzufassen.

Der instantane Zustand (zur Zeit  $t$ ) eines Punktquants in maximaler Präparation wird durch den **Zustandsvektor**  $\psi_t$  vollständig beschrieben, genauer: durch den zugehörigen Projektor. Der Name Zustandsvektor kommt daher, daß  $\psi_t$  mathematisch ein Element jenes HILBERTSchen Vektorraumes  $\mathcal{H}$  ist, der dem System zugeordnet ist. Die physikalische Bedeutung von  $\psi_t$  ist die eines **Wahrscheinlichkeitenpotentials**, d.h. aus  $\psi_t$  lassen sich die quantitativen Aussagen über die

**Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten aller Ereignisse**

**zur Zeit  $t$  beim vorliegenden Zustand ableiten. Ein bestimmtes Ereignis ist charakterisiert durch die gemeinsamen Meßwerte zu einem bestimmten kompletten Satz von Observablen (KOS).**

Die Prüfung all dieser Vorhersagen über das Verhalten eines Punktquants beim Zustand  $\psi_t$  geschieht in der Weise, daß der Experimentator in der Lage ist, den Zustand  $\psi_t$  beliebig oft zu präparieren, um daran die nötigen Messungen (Registrierung der auftretenden Ereignisse) vorzunehmen. Die bei diesen Meßreihen auftretenden Häufigkeiten der **gemeinsamen Meßwerte eines KOS** (kompletten Observablensatzes) müssen mit den vorhergesagten Wahrscheinlichkeiten übereinstimmen.

Ein wesentlicher Zug der Quantenmechanik (wie auch der Bohrmechanik) ist der, daß in der Quantenmechanik verschiedene, miteinander **inkompatible Ereignismengen** existieren: Der  $KOS_1$  definiert eine Ereignismenge  $E_1$  und  $\psi_t$  liefert das Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge  $E_1$ ; der  $KOS_2$  definiert eine Ereignismenge  $E_2$ ,  $\psi_t$  liefert auch das Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge  $E_2$  u.s.w. Der Zustandsvektor  $\psi_t$  liefert also auf allen Ereignismengen  $E_n$  das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß, daher nennen wir  $\psi_t$  Wahrscheinlichkeitenpotential.

Der wesentliche Unterschied zwischen der Quantenmechanik und der Bohrmechanik ist der, daß in der Quantenmechanik die **Superposition von 2 Zustandsvektoren**  $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2$  wieder einen möglichen Zustandsvektor ergibt; dies führt zu **Interferenzerscheinungen** analog zu denen, die aus den klassischen Wellentheorien (Wasserwellen, Akustik, Licht) bekannt sind. Deswegen sagt man oft, daß "Quanten sich auch wie Wellen verhalten" (Teilchen-Welle Dualismus).

Wir geben hier zunächst die vollständige Formulierung der Quantenmechanik für die einfachsten Quantensysteme, die 1-Teilchen-Systeme.

### 1-Teilchen-Systeme: $(m, e, A)$

Die **Masse**  $m$ , und die elektrische **Ladung**  $e$  definieren den **Charakter** des Teilchens (Elektron, Proton,...); das **elektromagnetische Potentialfeld**  $A = A_\nu(x^\rho)dx^\nu$  beschreibt die **Einwirkung** (äußere elektromagnetische Kraft) auf das Teilchen.

Man geht aus von der klassischen Beschreibung des Teilchens in hamiltonischer Form, wobei eine galileische Karte (Inertialsystem)  $(t, x^k)$ ,

( $k = 1, 2, 3$ ) zu Grunde zu legen ist. Mit  $p_k$  seien die 3 kanonisch konjugierten Impulskoordinatenfunktionen bezeichnet, die von der Standard-Lagrangefunktion auf dem Bewegungsraum  $B(M)$  (newtonisches Geschwindigkeitenbündel) induziert werden.

In dieser Karte lautet die **Hamiltonfunktion**

$$H(x^k, p_l, t) = \frac{1}{2m} \sum_k (p_k + \frac{e}{c} A_k(x^l, t))^2 + eA_0(x^l, t) \quad (1)$$

Zur Beachtung:

1) Was die  $p_k$  physikalisch bedeuten, ergibt sich aus der Beziehung

$$v^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{1}{m} (p_k + \frac{e}{c} A_k(x^l, t)) \quad d.h. \quad p_k = mv^k - \frac{e}{c} A_k(x^l, t)$$

dabei ist  $v^k$  die Geschwindigkeitskoordinatenfunktion. Da eine bestimmte elektromagnetische Einwirkung durch verschiedene Potentialfelder  $A$  beschrieben werden kann (mechanische Umeichungen) ist die konkrete Bedeutung der  $p_k$  von der Eichung abhängig.

2) Die vorgegebenen Funktionen  $A_\nu(x^k, t)$  beschreiben die Einwirkung eines äußeren Kraftfeldes, also eines immateriellen Agens im Sinne von NEWTONS Kraftbegriff. Das ist nicht die Beschreibung der Wechselwirkung mit der Fotomaterie im Sinne FARADAYS. Photomaterie und Elektromaterie in Wechselwirkung können nur durch eine wesentlich erweiterte Theorie, die **Quanten-Elektro-Photo-Dynamik** (Quantenelektrodynamik) beschrieben werden.

Der **Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik** erfolgt nun durch eine wohldefinierte Prozedur, die wir in 3 Axiomen formulieren:

**Axiom 1** (Kinematik 1 Punktquants)

Dem Quantensystem  $(m, e, A)$  ist der **Hilbertraum**  $\mathcal{H} \simeq L^2(\mathbb{R}^3)$  zugeordnet;

den 3 galileischen Orts-Observablen sind 3 selbstadjungierte Operatoren  $X^k$ , die **Orts-Operatoren** in  $\mathcal{H}$  zugeordnet;

den 3 konjugierten Impulsobservablen sind 3 selbstadjungierte Operatoren  $P_k$ , die **Impuls-Operatoren** in  $\mathcal{H}$  zugeordnet.

Diese 6 fundamentalen Operatoren des Systems sind charakterisiert durch die, von BORN und JORDAN 1925 entdeckten

**kanonischen Vertauschungsrelationen:** (CVR)

$$[X^k, P_l] = i\hbar\delta_l^k \cdot I, \quad [X^k, X^l] = 0, \quad [P_k, P_l] = 0 \quad (2)$$

Jeder sonstigen Observablen  $\mathcal{A}$  ist ein selbstadjungierter Operator  $A(X^k, P_l, t)$  in  $\mathcal{H}$  zugeordnet, der aus den 6 fundamentalen Operatoren und  $t$  aufgebaut ist, wobei die Zeit  $t$  nur als Parameter mal Einheitsoperator auftritt.

Die möglichen Meßwerte einer Observablen sind die **Spektralwerte** des zugeordneten selbstadjungierten Operators.

Bemerkung:

Den Observablen eines Quantensystems sind also nichtkommutierende Größen zugeordnet; in der Mathematik treten z.B. Matrizen als solche Größen auf, daher nannte man die "Neue Mechanik" in der Anfangszeit "Matrizenmechanik". DIRAC nannte solche Größen "q-numbers" (queer numbers oder quantum numbers) und nannte die kommutativen Größen der klassischen Mechanik "c-numbers"(classical numbers). Man kann leicht zeigen, daß die CVR nicht durch endlichdimensionale Matrizen dargestellt werden können, die Hilberträume physikalischer Systeme sind also immer  $\infty$ -dimensional. Die mathematische Theorie ist daher etwas aufwendig (Definitionsbereich, kontinuierliches Spektrum, Konvergenzfragen).

Dem Quantensystem ist ein Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  zugeordnet, in dem die Orts- und Impuls-Operatoren eine irreduzible Darstellung haben. Man kann zeigen, daß die Darstellung der CVR bis auf Äquivalenz eindeutig ist. Als konkrete Darstellung kann man den Hilbert-Raum  $L^2(\mathbb{R}^3)$  benutzen, die Vektoren  $\psi, \varphi, \dots \in \mathcal{H}$  sind also quadratintegrale Funktionen ("Wellenfunktionen")  $\psi(\vec{x}), \varphi(\vec{x}), \dots$ ; das Skalarprodukt  $(\varphi, \psi)$  ist definiert als

$$(\varphi, \psi) := \int d^3x \bar{\varphi}(\vec{x})\psi(\vec{x}) \quad (3)$$

Die Wirkung der Orts- und Impuls-Operatoren lautet dann:

$$(X^k\Psi)(\vec{x}) = x^k\Psi(\vec{x}), \quad (P_k\Psi)(\vec{x}) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^k}\Psi(\vec{x}) \quad (4)$$

Daraus ergibt sich die Wirkung aller anderen Operatoren.

Es ist wohl sofort klar, wie die folgenden, abstrakt geschriebenen, Operatoren konkret auf den "Wellenfunktionen"  $\Psi(\vec{x})$  operieren:

$$L^1 := X^2P_3 - X^3P_2, \quad cycl. \quad \text{kurz } \vec{L} = \vec{X} \times \vec{P} \quad (5)$$

das sind die **Drehimpuls-Operatoren** des Systems (Bahndrehimpuls bez. 0).

$$G^k(X^l, P_j, t) := mX^k - tP_k \quad (6)$$

das sind die **Operatoren des Schwerpunktes** des Systems.

$$H(X^k, P_l, t) = \frac{1}{2m} \sum_k (P_k + \frac{e}{c} A_k(X^l, t))^2 + eA_0(X^l, t) \quad (7)$$

ist der **Hamilton-Operator** des Systems. Dieser ist von besonderer Wichtigkeit, er bestimmt die **Quantendynamik**, d.h. die Zeitentwicklung aller Auftrittswahrscheinlichkeiten des Quantensystems **während ereignisloser Perioden**.

**Axiom 2** (Zustand u. Propensitäten)

Der instantane **Zustand** (Zeitpunkt  $t$ ) eines Punktquants wird mathematisch beschrieben durch den **Zustandsoperator**  $W_t$  ("Dichtematrix").

$W_t$  ist ein positiver Operator in  $\mathcal{H}$  mit den Eigenschaften:

$$W_t^\dagger = W_t, \quad W_t^2 \leq W_t, \quad Sp W_t = 1 \quad (8)$$

Falls  $W_t^2 = W_t$ , dann ist  $W_t$  ein eindimensionaler Projektor, es gibt also einen Vektor  $\Psi_t \in \mathcal{H}$ , mit  $W_t = P_{\Psi_t}$ ; ein solcher Zustand heißt ein **reiner Zustand**, er entspricht einer maximalen Präparation des Punktquants.

Falls  $W_t^2 < W_t$ , dann liegt ein **gemischter Zustand** vor; ein solcher beschreibt Mittelwerte über mehrere (auch  $\infty$  viele) reine Zustände. Eine solche Gesamtheit von Punktquanten ist nicht maximal präpariert, sie kann durch Entmischung in reine zerlegt werden.

Beim Zustand  $W_t$  ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Ereignisses, charakterisiert durch gemeinsame "Meßwerte" im Spektralintervall  $\Delta_{a,b,..}$  eines **kompletten Observablen Satzes** (KOS) gegeben als:

$$w_{W_t}(\Delta_{a,b,..}) = Sp W_t P_{\Delta_{a,b,..}} \quad (9)$$

dabei ist  $P_{\Delta_{a,b,..}}$  der Projektionsoperator auf das gewählte Spektralintervall des KOS.

Eine bestimmte Gesamtheit von Quantensystemen ist experimentell charakterisiert durch eine genau spezifizierte Präpariermethode (Laborvorschrift), nach der beliebig viele Einzelsysteme hergestellt werden können. Außerdem muß durch Kontrollexperimente, *d.h.* durch Aufnahme entsprechender Meß-Statistiken für alle möglichen kompletten Observablensätze, sichergestellt sein, dass diese Statistiken sich stets reproduzieren. Zwei verschiedene Präpariermethoden liefern dieselbe Gesamtheit, wenn alle Meß-Statistiken übereinstimmen. Schließlich ist der präparierten Gesamtheit jener Zustandsoperator  $W_{t_0}$  zuzuordnen, der alle Meßwahrscheinlichkeiten in Übereinstimmung mit den gemessenen Häufigkeiten liefert.

### Einige Beispiele für Ereignismengen

(gemeinsame Messung mehrerer Observablen):

1) **Gemeinsame Messung der 3 Impuls-Observablen**  $\{P_1, P_2, P_3\}$ :

Der Projektionsoperator auf das gemeinsame Spektralintervall ist

$$P_{\Delta^3 p} = \int_{\Delta^3 p} d^3 p |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| \quad (10)$$

wobei  $|\vec{p}\rangle$  die uneigentliche Impulsbasis ist, definiert durch die Gleichungen

$$\vec{P} |\vec{p}\rangle = \vec{p} |\vec{p}\rangle, \quad \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (11)$$

Damit ergibt sich für die **gemeinsame Impuls-Meßwahrscheinlichkeit**

$$Sp W_t P_{\Delta^3 p} = \int_{\Delta^3 p} d^3 p \langle \vec{p} | W_t | \vec{p} \rangle \quad (12)$$

Falls ein reiner Zustand vorliegt:  $W_t = P_{\psi_t}$ , ergibt sich der Ausdruck

$$Sp W_t P_{\Delta^3 p} = \int_{\Delta^3 p} d^3 p |\langle \vec{p} | \psi_t \rangle|^2 \quad (13)$$

Das Absolutquadrat des Zustandsvektors in der Impulsdarstellung ist also einfach als Impuls-Wahrscheinlichkeitsdichte zu interpretieren.

2) **Gemeinsame Messung der 3 Observablen**  $\{P_1, P_2, X^3\}$ 

Die uneigentliche Basis zu diesen 3 Operatoren  $|p_1, p_2, x^3\rangle$  liefert die entsprechenden Projektionsoperatoren  $P_{\Delta_{p_1, p_2, x^3}}$ ; und die **gemeinsame Meßwahrscheinlichkeit**

$$Sp P_{\psi_t} P_{\Delta_{p_1, p_2, x^3}} = \int_{\Delta_{p_1, p_2, x^3}} dp_1 dp_2 dx^3 |\langle p_1, p_2, x^3 | \psi_t \rangle|^2 \quad (14)$$

Zur Klarstellung sei nun noch darauf hingewiesen, daß  $\{P_1, X^1, \dots\}$  kein KOS ist, *d.h.* die Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man gemeinsam einen  $P_1$ -Meßwert im Intervall  $\Delta_{p_1}$  und einen  $X^1$ -Meßwert im Intervall  $\Delta_{x^1}$ ? wird von der Quantenmechanik als unzulässig, unmöglich, sinnlos, ... qualifiziert.

$X^1, P_1$  sind grundsätzlich **nicht gemeinsam bestimmt**. Zwischen den Meß-Statistiken je einer  $X^1$  -, bzw.  $P_1$  - Meßreihe bei einer bestimmten Gesamtheit  $W$  besteht die

**Unbestimmtheits-Relation**

$$(\Delta X^1)_W \cdot (\Delta P_1)_W \geq \frac{\hbar}{2} \quad (15)$$

In diesem Sinne ist die Quantentheorie (unaufhebbar) indeterministisch.

**Axiom 3** **Quantendynamik**

Wenn eine Gesamtheit zum Zeitpunkt  $t_0$  präpariert vorliegt, also durch einen bestimmten Zustandsoperator  $W_{t_0}$  beschrieben ist, und ab dann der dynamischen Entwicklung folgt, dann ändert sich der Zustand kausal nach dem **Bewegungsgesetz**:

$$\frac{d}{dt} W_t = -\frac{i}{\hbar} [H, W_t], \quad W_t = U_{t, t_0} W_{t_0} U_{t, t_0}^{-1} \quad (16)$$

Dieses liefert zum Anfangszustand  $W_{t_0}$  den Zustand  $W_t$  zu jeder anderen Zeit  $t$ , eindeutig. Ein reiner Anfangszustand bleibt dabei rein.

Für den Zustandsvektor  $\Psi_t$  eines reinen Zustands gilt speziell die

**Schrödingergleichung**

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi_t = H \Psi_t \quad (17)$$

die mit dem Anfangsdatum  $\Psi_{t_0}$  zu lösen ist. Ist der Anfangszustand eine Superposition  $\Psi_{t_0} = \psi + \phi$ , dann gilt wegen der Linearität der Schrödingergleichung  $\Psi_t = \psi_t + \phi_t$ . Dieser Sachverhalt führt zu **Interferenzerscheinungen** beim Auftritt von Ereignissen, die analog sind zu den bekannten Interferenzen in einer klassischen Wellentheorie (2 Löcher-versuch!)

Schrödinger hat 1926 versucht eine klassische Wellentheorie der elektronischen Materie aufzustellen (Wellenmechanik), diese ist aber nicht im Einklang mit der Realität. Seine Wellengleichung und die mit dieser zusammenhängenden mathematischen Methoden hatten aber für die Entwicklung der Quantenmechanik allergrößte Bedeutung.

Die hier gegebene Formulierung der dynamischen Entwicklung eines Quantensystems während ereignisloser Perioden nennt man das **SCHRÖDINGER-BILD**; dies ist die von BORN 1927 gegebene Interpretation der SCHRÖDINGERSchen Wellenfunktion. Es gibt eine äquivalente Formulierung der dynamischen Entwicklung eines Quantensystems, die **HEISENBERG-BILD** genannt wird.

Die Lösung der Bewegungsgleichung bedeutet die Konstruktion einer Schar unitärer Operatoren  $U_{t,t_0}$ , die durch den Hamiltonoperator  $H$  erzeugt werden gemäß den Gleichungen

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_{t,t_0} = H U_{t,t_0} \quad U_{t_0,t_0} = I \quad (18)$$

Diese Evolutionsoperatoren sind unitär und genügen den Relationen

$$U_{t_2,t_1} \cdot U_{t_1,t_0} = U_{t_2,t_0}, \quad U_{t_0,t_1} = U_{t_1,t_0}^{-1} \quad (19)$$

Mittels der Operatoren  $U_{t,t_0}$  erhält man die Lösung der Bewegungsgleichung in der Form

$$\Psi_t = U_{t,t_0} \Psi_{t_0}, \quad W_t = U_{t,t_0} W_{t_0} U_{t,t_0}^\dagger \quad (20)$$

Die Lösung der Gleichung für die Operatoren  $U_{t,t_0}$  läßt sich formal in Form der zeitgeordneten Exponentialreihe anschreiben:

$$U_{t,t_0} = \mathcal{T} \exp\left\{ \frac{-i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') \right\} \quad (\text{Dyson-Reihe}) \quad (21)$$

Falls der Hamiltonoperator  $H$  nicht explizite von der Zeit abhängt, ergibt sich

$$U_{t,t_0} = e^{-i(t-t_0)H/\hbar} \quad (22)$$



Dies ist eine 1-dimensionale Lie-Gruppe unitärer Operatoren im Hilbertraum.

### Quantensprünge

Nach dem bisher Gesagten stehen wir vor folgender Situation:

Ein quantenmechanisches System sei zur Zeit  $t = 0$  in einem bestimmten Zustand  $W_0$  präpariert worden, danach entwickle es sich unter Einwirkung gegebener immaterieller Kräfte bis zur Zeit  $t = t_1$ . Während dieser Zeit treten keinerlei Ereignisse auf, zur Zeit  $t_1$  liegt also der eindeutig bestimmte Zustand  $W_{t_1}$  vor. Zur Zeit  $t_1$  möge nun ein Ereignis auftreten; dies geschieht entweder, weil das betrachtete System mit einem anderen System in Wechselwirkung tritt (z.B. mit einer Meßapparatur), oder weil innerhalb des Systems "etwas geschieht" (z.B. ein Atomkern stößt ein  $\alpha$ -Teilchen aus; oder eine Zelle stirbt ab). Nach dem Ereignis liegt offenbar ein neuer Zustand des Systems vor, der, weil das Ereignis ein "Quantensprung" war, nicht aus der Zeitentwicklungsgleichung für Zustände berechnet werden kann.

Die Quantenmechanik sagt nichts darüber aus, was bei einem Quantensprung passiert, gerade das aber würde uns brennend interessieren. E.Schrödinger

Die Antwort auf die Frage: Welcher Zustand liegt unmittelbar nach Eintritt eines bestimmten Ereignisses vor? wird durch das IV. Axiom der Quantenmechanik gegeben (v. Neumann):

### Das IV. Axiom

**Nach dem Auftritt eines Ereignisses liegt jener Zustand vor, der für den dem Ereignis zugeordneten Punkt in der entsprechenden Ereignismenge die Wahrscheinlichkeit 1 liefert.**

Die Problematik, die mit dem Konzept "Quantensprung" zusammenhängt, gilt als das bis heute ungelöste Problem der Quantentheorie (Vervollständigung wird verlangt), es wird in der Literatur als das quantenmechanische "Meßproblem" bezeichnet. Vorläufig ist wohl zuzugeben, daß noch nicht alle Probleme gelöst sind.

"Die verdammte Quantenspringerei ... " E. Schrödinger

"Is there then jumping all the time? " J. Bell

"What really bothers me is the measurement problem." I. Cirac

Wir geben nun noch einen kurzen Ausblick auf weitere fundamentale Quantengesetze.

## Elektronen haben einen Spin

Die Erfahrung zeigt, daß ein Elektron neben Ort und Impuls noch 3 weitere fundamentale kinematische Eigenschaften besitzt: die 3 Komponenten des Eigendrehimpulses  $S^1, S^2, S^3$ . Diese erfüllen dieselben Vertauschungsrelationen wie die 3 Komponenten des Bahndrehimpulses. Der Betrag des Eigendrehimpulses ist jedoch fixiert ( $\frac{\hbar}{2}$ ); einen solchen Drehimpuls nennt man **Spin**.

Der bisher betrachtete Hilbertraum eines Elektrons muß also vergrößert werden, um Platz zu haben für die Spinvariablen. Der dafür zuständige Funktionenraum besteht aus 2-komponentigen komplexen Wellenfunktionen (Pauli-Spinorfelder). Der Hilbertraum für 1 Elektron mit Spin ist  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$

Mit dem Spin ist ein magnetisches Dipolmoment des Elektrons verbunden (Bohrsches Magneton). Dies führt zu einer Reihe interessanter Phänomene: Feinstruktur, Zeeman-Effekt, Magnetismus.

## Mehrelektronen-Systeme

**Wie sind Quantensysteme mit mehreren Elektronen zu beschreiben?** Die Antwort auf diese Frage führte auf ein neues fundamentales Naturgesetz:

### Das Pauli-Prinzip:

Der Hilbertraum eines n-Elektronen Systems ist das n-fache **alternierende Tensorprodukt** von 1-Elektron Hilberträumen.

Damit erklären sich viele physikalische Eigenschaften: z.B. Schalenbau der Atomhüllen, Verhalten von Leitungselektronen in Leitern und Halbleitern, etc.

Im Falle von nicht wechselwirkenden Elektronen, die irgendwie gebunden sind (diskrete Energieniveaus) findet dieses Prinzip einfache Anwendung durch die Formulierung:

Jedes Energieniveau kann nur durch 1 Elektron besetzt sein.

Das Pauliprinzip gilt auch für alle anderen Sorten gleichartiger Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$ ; z.B. für Protonen, oder für Neutronen.