Abstraktion ist die Hervorhebung des Wesentlichen; nur so erreicht man Klarheit und Anwendbarkeit.

Mathematische Methoden der Physik 2

uibk. WS98/99, Josef Rothleitner

Inhaltsverzeichnis

Teil I. Lineare Algebra

1.1 Vektorräume und wichtige Vektorraum-Strukturen

Sei $\mathcal{T}$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ mit $dim(\mathcal{T}) = n$, die Elemente u, v, w, e_1, e_2, $... \in \mathcal{T}$ heißen **T-Vektoren**. Mit $\mathcal{T}^*$ wird der zu $\mathcal{T}$ duale Vektorraum bezeichnet. Die Elemente A, B, U, V, E^1, E^2, $... \in \mathcal{T}^*$ heißen
T^***-Vektoren**.

Ein T^*-Vektor A ist eine lineare Funktion von $\mathcal{T}$ nach $\mathbb{R}$:

$$A : \mathcal{T} \to \mathbb{R} : u \mapsto A(u), \quad \text{wir schreiben für A(u) auch } \langle A, u\rangle \tag{1.1}$$

Sei $(e_k)_{k=1,2,..n}$ eine **Basis** in $\mathcal{T}$ (geordnete Menge von n linear unabhängigen T-Vektoren), und sei $(E^k)_{k=1,2,..n}$ die **duale Kobasis** in $\mathcal{T}^*$, dann gelten die Relationen:

$$\langle E^i, e_k\rangle \equiv E^i(e_k) = \delta^i{}_k \tag{1.2}$$

Ein T-Vektor v hat in der Basis $(e_k)_{k=1,2,..n}$ die Komponentendarstellung

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + ... + v^n e_n = v^k e_k \quad \text{(Summenkonvention!)} \tag{1.3}$$

Das n-Tupel der reellen Zahlen (v^k) wird für rechnerische Zwecke zu einer Matrix mit n Zeilen und 1 Spalte zusammengefaßt; diese Matrix [Spalte] ist die konkrete Darstellung des T-Vektors v in der Basis $(e_k)_{k=1,2,..n}$. Ein T^*-Vektor A hat in der Kobasis $(E^k)_{k=1,2,..n}$ die Komponentendarstellung

$$A = A_1 E^1 + A_2 E^2 + ... + A_n E^n = A_i E^i \quad \text{(Summenkonvention!)} \tag{1.4}$$

Das n-Tupel der reellen Zahlen (A_i) wird für rechnerische Zwecke zu einer Matrix mit 1 Zeile und n Spalten zusammengefaßt; diese Matrix [Zeile] ist die konkrete Darstellung des T^*-Vektors in der Basis $(E^k)_{k=1,2,..n}$.

Aus der Dualität der Basen folgen die Gleichungen:

$$\langle A, v\rangle \equiv A(v) = A_i v^i \ , \quad v^i = E^i(v) \equiv \langle E^i, v\rangle, \quad A_i = A(e_i) \tag{1.5}$$

Basiswechsel

Um eine für sich selbst sprechende ökonomische Schreibweise zu erreichen unterscheiden wir verschiedene Basen durch quergestrichene Indizes:

$$(e_{\bar{1}}, e_{\bar{2}}, ..., e_{\bar{n}}) = (e_{\bar{k}}), \quad (E^{\bar{1}}, E^{\bar{2}}, ..., E^{\bar{n}}) = (E^{\bar{k}}) \tag{1.6}$$

ist also ein anderes duales Basenpaar. Der Basiswechsel erfolgt durch die **Transformationsformeln**:

$$e_{\bar{k}} = e_k \ \tau^k{}_{\bar{k}}, \ E^k = \tau^k{}_{\bar{k}} E^{\bar{k}}; \quad e_k = e_{\bar{k}} (\tau^{-1})^{\bar{k}}{}_k, \ E^{\bar{k}} = (\tau^{-1})^{\bar{k}}{}_k E^k \tag{1.7}$$

Die nichtsinguläre $n \times n$-Matrix τ heißt Transformationsmatrix oder Basiswechselmatrix.

Ein T-Vektor v hat also die Darstellungen:

$$v = v^k e_k = v^{\bar{k}} e_{\bar{k}} \tag{1.8}$$

mit der Transformation der Komponenten:

$$v^k = \tau^k{}_{\bar{k}} v^{\bar{k}} \quad \text{Matrizenmultiplikation!} \tag{1.9}$$

Je nach gewählter Basis wird also der T-Vektor v durch verschiedene Spaltematrizen dargestellt.

Für einen T^*-Vektor A gilt analog:

$$A = A_k E^k = A_{\bar{k}} E^{\bar{k}} \quad \text{mit } A_{\bar{k}} = A_k \tau^k{}_{\bar{k}} \tag{1.10}$$

Je nach gewählter Basis wird der T^*-Vektor A durch verschiedene Zeilematrizen dargestellt. In jedem dualen Basenpaar erhält man die Zahl $A(v)$ als Matrizenprodukt der zugehörigen Darstellungsmatrizen:

$$A(v) = A_k v^k = A_{\bar{k}} v^{\bar{k}} \tag{1.11}$$

(Bemerkung: In Math. I werden für Basen in $\mathcal{T}$ die Schreibweisen $(e_1, e_2, ..., e_n) = \underline{e}$ verwendet; verschiedene Basen werden durch verschiedene Buchstaben bezeichnet, $(f_1, f_2, ..., f_n) = \underline{f}$ ist also eine andere Basis. Das führt zu einer umständlicheren Bezeichnung für die Darstellungsmatrizen eines Vektors, denn man müßte so schreiben:
$v = ve^1\, e_1 + ve^2\, e_2 + ... = vf^1\, f_1 + vf^2\, f_2 + ...$

Lineare Operatoren

Ein linearer Operator L ist eine lineare Abbildung eines Vektorraumes in sich $\quad L : \mathcal{T} \to \mathcal{T} : v \mapsto L\ v,\quad$ der Operator L bildet den T-Vektor v ab in den T-Vektor $\hat{v}$: $\quad L\ v = \hat{v}$

Wegen der Linearität der Abbildung $\quad L\ v = L\ v^k e_k = v^k L\ e_k\quad$ genügt die Kenntnis der Bildvektoren einer Basis:

$$L\ e_k = e_i L^i{}_k, \quad \text{mit} \quad L^i{}_k = < E^i, Le_k) = \tau^i{}_{\bar{i}}\ L^{\bar{i}}{}_{\bar{k}}\ (\tau^{-1})^{\bar{k}}{}_k \tag{1.12}$$

Die $n \times n$-Matrix $[L^i{}_k]$ besteht aus den **Komponenten des Operators** L **bezüglich der Basis** $(e_k)_{k=1,2,..n}$; die $n \times n$-Matrix $[L^{\bar{i}}{}_{\bar{k}}]$ besteht aus den Komponenten des Operators L bezüglich der Basis $(e_{\bar{1}}, e_{\bar{2}}, ..., e_{\bar{n}})$. Der Operator L hat also je nach gewählter Basis verschiedene Matrizen als Darstellung; die gewählte Basis liest man unmittelbar an der Form der Matrixindizes ab.

Werden 2 lineare Operatoren L_1, L_2 hintereinander angewendet: $\ L_1 L_2 v$, dann tritt als Dartellungsmatrix von $L_1 L_2$ das Matrizenprodukt der einzelnen Darstellungsmatrizen auf:

$$(L_1 L_2)^i{}_k = (L_1)^i{}_j (L_2)^j{}_k \quad \text{(Summenkonvention!)} \tag{1.13}$$

Die Operation der linearen Gruppe $Gl(n,\mathbb{R})$ in $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}^*$:

Ein Gruppenelement g definiert eine lineare Abbildung $L_g : \mathcal{T} \to \mathcal{T} : v \mapsto \hat{v}$
L_g bildet den Vektor v ab in den Vektor $\hat{v}$:

$$L_g \; v = \hat{v} \tag{1.14}$$

Wegen der Linearität der Abbildung genügt die Kenntnis der Bildvektoren einer Basis:

$$L_g e_k = e_i g^i{}_k, \quad \text{mit} \quad g^i{}_k =< E^i, L_g e_k) \tag{1.15}$$

Die Matrix $(g^i{}_k)$ besteht aus den Komponenten des Operators L_g bezüglich der Basis $(e_k)_{k=1,2,..n}$. Aus (1.15) folgen die Komponenten des Bildvektors $\hat{v}$ durch Matrizenmultiplikation:

$$L_g v = \hat{v} = \hat{v}^i e_i, \quad \text{wobei} \quad \hat{v}^i = g^i{}_k v^k \tag{1.16}$$

Dem Produkt 2-er Gruppenelemente $g_1 \cdot g_2$ ist der lineare Operator $L_{g_1} L_{g_2}$ zugeordnet, seine Darstellungsmatrix ist das Matrizenprodukt $(g_1)^i{}_j (g_2)^j{}_k$.
Da g Element einer Gruppe ist, gibt es auch g^{-1} ; es gilt die Relation
$L_{g^{-1}} = (L_g)^{-1}$ (inverser Operator) .
Die Gruppe operiert mit den linearen Operatoren L_g^* in $\mathcal{T}^*$
$L_g^* : \mathcal{T}^* \to \mathcal{T}^* : A \mapsto L_g^* A =: \hat{A}$
Der lineare Operator L_g^* bestimmt sich aus der Forderung:

$$< L_g^* A, L_g v) \; = < A, v), \text{ für alle } A, v \tag{1.17}$$

Daraus folgt für die Bilder der dualen Basis

$$L_g^* E^k = (g^{-1})^k{}_i E^i \tag{1.18}$$

Die Komponenten von $\hat{A} = \hat{A}_i E^i$ ergeben sich als:

$$\hat{A}_i = A_k \; (g^{-1})^k{}_i \tag{1.19}$$

*** Das Arsenal der Tensorprodukt-Vektorräume.**

Seien $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ Vektorräume, $dim(\mathcal{V}) = n$, $dim(\mathcal{W}) = m$; dann ist $\mathcal{V} \bigotimes \mathcal{W}$ der Tensorprodukt-Vektorraum, $dim(\mathcal{V} \bigotimes \mathcal{W}) = n.m$

Sei $(e_k)_{k=1,2,..n}$ eine Basis in $\mathcal{V}$, $(b_a)_{a=1,2\ ,\ ...,m}$ eine Basis in $\mathcal{W}$; dann bilden die $\{e_k \otimes b_a\}$ eine Basis in $\mathcal{V} \bigotimes \mathcal{W}$. Ein Vektor $t \in \mathcal{V} \bigotimes \mathcal{W}$ hat in dieser Basis die Darstellung $\quad t = t^{ka} e_k \otimes b_a$

Besonderes gibt es im Fall $\mathcal{V} = \mathcal{W}$:
der Tensorproduktraum kann in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Untervektorraum zerlegt werden.

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} = \mathcal{V} ⓢ \mathcal{V} \ \oplus \ \mathcal{V} \Lambda \mathcal{V} \tag{1.20}$$

Die Dimension dieser Vektorräume ergibt sich als:

$$dim(\mathcal{V} ⓢ \mathcal{V}) = n(n+1)/2, \quad dim(\mathcal{V} \Lambda \mathcal{V}) = n(n-1)/2 \tag{1.21}$$

Die Elemente von $\mathcal{V} \Lambda \mathcal{V}$ nennen wir **2-Vektoren** (Bi-Vektoren); die Elemente von $\mathcal{V} ⓢ \mathcal{V}$ nennen wir **symmetrische Tensoren 2-ter Stufe**.

Eine Basis $(e_k)_{k=1,2,..n}$ in $\mathcal{V}$ induziert die Basis (e_{ik}) in $\mathcal{V} ⓢ \mathcal{V}$ und die Basis $(e_i \wedge e_k)$ in $\mathcal{V} \Lambda \mathcal{V}$:

$$e_{ik} = e_{ki} := (e_i \otimes e_k + e_k \otimes e_i) \tag{1.22}$$

$$e_i \wedge e_k = -e_k \wedge e_i := (e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_i) \tag{1.23}$$

Mehrfache Tensorprodukte führen zu weiteren Vektorräumen.

Die alternierenden Produkte von $\mathcal{T}^*$

Die Elemente von $\Lambda^2 \mathcal{T}^* := \mathcal{T}^* \Lambda \mathcal{T}^*$ heißen **2-T^*-Vektoren**; die Elemente des k-fachen alternierenden Produktraumes $\Lambda^k \mathcal{T}^*$ nennen wir **k-T^*-Vektoren**. Wir bezeichnen $\quad \Lambda^1 \mathcal{T}^* := \mathcal{T}^*$ und $\quad \Lambda^0 \mathcal{T}^* := \mathbb{R}$; Für die Dimension gilt $\quad dim(\Lambda^k \mathcal{T}^*) = \binom{n}{k}$, $k = 0, 1, ...n$.

Eine Basis $(E^k)_{k=1,2,..n}$ in $\mathcal{T}^*$ induziert in $\Lambda^2 \mathcal{T}^*$ die Basis

$E^1 \wedge E^2, E^1 \wedge E^3, ..., E^{n-1} \wedge E^n$, dabei ist das alternierende Produkt $\wedge$ (sprich: Dach) von T^*-Vektoren definiert durch:

$$(A \wedge B)(u, v) := A(u)B(v) - A(v)B(u) \tag{1.24}$$

Die Verallgemeinerungen auf mehrere Faktoren sind evident, für 3 Faktoren z.B. gilt:

$$(A \wedge B \wedge C)(u, v, w) := Det \begin{bmatrix} A(u) & A(v) & A(w) \\ B(u) & B(v) & B(w) \\ C(u) & B(v) & C(w) \end{bmatrix}$$

Für mehrfache $\wedge$-Produkte ergeben sich entsprechende Determinanten.

Der allgemeine 2-T^*-Vektor $F = \frac{1}{2} F_{ik}\ E^i \wedge E^k$ bildet das T-Vektorenpaar u, v ab in die reelle Zahl

$$F(u,v) = F_{ik} u^i v^k \quad \text{(Summenkonvention!)} \tag{1.25}$$

Diese algebraische Struktur spielt bei der **Integration von 2-Formen über 2-dimensionale Gebiete** eine fundamentale Rolle.

Der allgemeine 3-T^*-Vektor $J = \frac{1}{3!} J_{ikl}\ E^i \wedge E^k \wedge E^l$ bildet das Tripel von T-Vektoren u, v, w ab in die reelle Zahl

$$J(u,v,w) = J_{ikl} u^i v^k w^l \quad \text{(Summenkonvention)} \tag{1.26}$$

Diese algebraische Struktur spielt bei der **Integration von 3-Formen über 3-dimensionale Gebiete** eine fundamentale Rolle.

Inneres Produkt (Kontraktion = Verjüngung = Überschiebung)

Seien $u \in \mathcal{T}$, $F \in \Lambda^k \mathcal{T}^*$; das innere Produkt $u \lrcorner F$ ist ein Element aus $\Lambda^{k-1}\mathcal{T}^*$, definiert durch

$$(u \lrcorner F)(v_2, v_3, ..., v_k) := F(u, v_2, v_3, ..., v_k) \tag{1.27}$$

In einer Basis hat man $u = u^i e_i$, $F = \frac{1}{k!} F_{jlm...}.\ E^j \wedge E^l \wedge E^m \wedge ...,$ und schließlich

$$u \lrcorner F = \frac{1}{(k-1)!} u^j F_{jlm...} E^l \wedge E^m \wedge ... \tag{1.28}$$

Ein Beispiel mit $n = 4$ (Indizes $0, 1, 2, 3$) :
$j = j^0 e_0 + j^1 e_1 + j^2 e_2 + j^3 e_3$, $E = E^0 \wedge E^1 \wedge E^2 \wedge E^3,$ $J := j \lrcorner E$

$$J = j^0 E^1 \wedge E^2 \wedge E^3 - j^1 E^0 \wedge E^2 \wedge E^3 - j^2 E^0 \wedge E^3 \wedge E^1 - j^3 E^0 \wedge E^1 \wedge E^2$$

Diese algebraische Struktur kommt *z.B.* in der Elektrodynamik bei der Bildung der Ladungs-3-Form J aus dem Strom-Vektorfeld j vor.

Vektorraum mit geometrischen Strukturen

In den physikalischen Anwendungen sind die auftretenden Vektorräume immer mit bestimmten geometrischen Strukturen ausgestattet. Das wichtigste Beispiel ist ein Vektorraum mit einer **symmetrischen nicht ausgearteten Bilinearform** G.

$(\mathcal{T}, G)$ heißt Vektorraum mit innerem Produkt, G heißt (pseudo-)Metrik.

Genau formuliert: G ist eine Abbildung $G : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R} : u, v \mapsto G(u,v)$ mit den 3 Eigenschaften:

1) $G(u,v) = G(v,u)$ (symmetrisch);
2) $G(u, \alpha\ v + \beta w) = \alpha\ G(u,v) + \beta\ G(u,w)$, $\alpha, \beta\ \epsilon \mathbb{R}$ (bilinear);
3) $sign(G) = (r,s)$ (r mal +1, s mal -1), $r + s = n = dim(\mathcal{T})$

Ist außerdem noch $s = 0$, dann ist G positiv definit; in diesem Fall nennt man das innere Produkt auch Skalarprodukt (euklidischer Vektorraum).

Die musikalischen Isomorphismen $\sharp$ und $\flat$
Da die Metrik G nicht ausgeartet ist, definiert sie einen Isomorphismus $\flat : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^* : u \mapsto U := \flat u$ durch die Definition:

$$< \flat u, v) \ := \ G(u,v) \quad \text{für alle } u, v \in \mathcal{T} \tag{1.29}$$

Die Metrik G induziert eine symmetrische Bilinearform g in $\mathcal{T}^*$, g heißt **Kometrik**; diese ist definiert durch

$$g(U,V) := G(u,v), \quad \text{wobei} \quad U = \flat u, V = \flat v \tag{1.30}$$

Die Kometrik g kann auf alle $\Lambda^k \mathcal{T}^*$ ausgedehnt werden, wir bezeichen diese mit g_k. Beispiel:

$$g_2(A \wedge B, U \wedge V) \ := \ 2! \ [g(A,U) \ g(B,V) - g(A,V) \ g(B,U)] \tag{1.31}$$

Vermöge g ist der zu $\flat$ inverse Isomorphismus $\sharp : \mathcal{T}^* \to \mathcal{T} : U \mapsto u := \sharp U$ definiert, durch

$$< A, \sharp U) \ := \ g(A,U) \quad \text{für alle} \quad A, U \in \ \mathcal{T}^* \tag{1.32}$$

Seien $(e_k)_{k=1,2,..n}$, $(E^k)_{k=1,2,..n}$ duale Basen in $\mathcal{T}$, bzw. in $\mathcal{T}^*$; wir bezeichnen

$$G_{ik} := G(e_i, e_k), \qquad g^{ik} := g(E^i, E^k) \tag{1.33}$$

Die symmetrische $n \times n$ Matrix $[G_{ik}]$ besteht aus den Komponenten von G bezüglich der Basis $(e_k)_{k=1,2,..n}$, die symmetrische $n \times n$ Matrix $[g^{ik}]$ besteht aus den Komponenten von g bezüglich der dualen Kobasis $(E^k)_{k=1,2,..n}$. Es besteht die Relation

$$g^{il} G_{lk} = \delta^i{}_k \tag{1.34}$$

Die Darstellungsmatrizen von G und g bezüglich jedes dualen Basen-Paares sind also invers zueinander.

Die Bilder der Basisvektoren haben die folgenden Darstellungen:

$$\flat e_i = G_{ik} E^k, \qquad \sharp E^i = g^{ik} e_k \tag{1.35}$$

Damit gilt für einen T-Vektor $u = u^i e_i$

$$\flat u =: U = U_k E^k, \quad \text{mit} \quad U_k = G_{ki} u^i \quad (\mathit{Indexherunterziehen}) \tag{1.36}$$

Für einen T^*-Vektor : $U = U_i E^i$ erhält man

$$\sharp U =: u = u^k e_k, \quad \text{mit} \quad u^k = g^{ki} \ U_i \quad (\mathit{Indexhochziehen}) \tag{1.37}$$

Die Abbildungen $\flat$, $\sharp$ können auf alle Tensorprodukträume ausgedehnt werden.

Vektorraum mit Metrik und metrischer Orientierung $(\mathcal{T}, G, E)$
Zusätzlich zu G ist als weitere Struktur ein $n - T^*$-Vektor $E \in \Lambda^n \mathcal{T}^*$ gegeben, der mittels g normiert ist:

$$g_n(E,E) = (-1)^{rs} \ n! \tag{1.38}$$

E heißt **metrische Orientierung**.

In den physikalischen Anwendungen kommen am häufigsten die 2 Fälle vor:
$n = 3, G$ positiv definit: euklidischer Vektorraum.
$n = 4, r = 1, s = 3$ (Lorentz-Signatur): minkowskischer Vektorraum.

Normalbasen bezüglich (G, E) :
Eine Basis (n_i) in $\mathcal{T}$ heißt Normalbasis zu G, E, wenn

1) $G_{ik} := G(n_i, n_k) = \eta_{ik}$ wobei η die folgende Standardmatrix ist
$\eta := Diag(+1, +1, ..., -1, -1, ...)$, $(r\ mal + 1,\ s\ mal - 1)$, η heißt Signaturmatrix von G.
2) $E(n_1, n_2, ...n_n) = +1$ (die Basis liegt in der Orientierung von E).

Für die duale Kobasis (N^i) in $\mathcal{T}^*$ gilt die Gleichung $g^{ik} := g(N^i, N^k) = \eta^{ik}$, und die metrische Orientierung lautet: $E = N^1 \wedge N^2 \wedge ... \wedge N^n$.

Es gibt unendlich viele Normalbasen zu G, E (siehe später).

Die * Abbildung (Hodge-Abbildung):

In Vektorräumen der Struktur $(\mathcal{T}, G, E)$ ist vermöge g und E die Abbildung $* : \Lambda^k\mathcal{T}^* \to \Lambda^{n-k}\mathcal{T}^* : U \mapsto *U$ definiert. Die Abbildung * ist eindeutig bestimmt durch die Forderungen:
a) * ist eine lineare Abbildung
b) $V \wedge *U = \frac{1}{k!}\, g_k(V, U).E$ für alle $U, V \in \Lambda^k\mathcal{T}^*$

Als spezielles Beispiel sei die Definition des Vektorproduktes $\vec{u} \times \vec{v}$ erwähnt, das im Falle $dim(\mathcal{T}) = 3$ definiert werden kann; die Definition lautet:

$$\vec{u} \times \vec{v} := \sharp * (\flat u \wedge \flat v) \tag{1.39}$$

Die Symmetriegruppe(Invarianzgruppe) von $(\mathcal{T}, G, E)$

Die Gruppe $Gl(n, \mathbb{R})$ operiert linear in $\mathcal{T}$; einem Gruppenelement $\gamma \in Gl(n, \mathbb{R})$ ist der lineare Operator $L_\gamma : \mathcal{T} \to \mathcal{T} : v \mapsto \hat{v}$ zugeordnet. Wegen der Linearität $L_\gamma v = v^i L_\gamma e_i$, genügt es $L_\gamma e_i = e_k\ \gamma^k{}_i$ zu kennen. Die Matrizen $[\gamma^k{}_i]$ sind definiert durch die Elemente $\gamma^k{}_i =< E^k, L_\gamma e_i)$.

Eine konkrete Operation der Gruppe $Gl(n, \mathbb{R})$ in $\mathcal{T}$ wird dadurch definiert, daß man in einer bestimmten Basis (e_i) einfach die Menge aller konkreten reellen $n \times n$-Matrizen $[\gamma^k{}_i]$ als Darstellungsmatrizen heranzieht; die Umrechnung auf eine andere Basis erfolgt dann mittels der Transformationsformel (1.12).

Die **Symmetriegruppe von** $(\mathcal{T}, G, E)$ ist jene Untergruppe von $Gl(n, \mathbb{R})$, welche die 2 folgenden Relationen erfüllt:
$G(L_\gamma u, L_\gamma v) = G(u, v)$, und $E(L_\gamma u, L_\gamma v, ...) = E(u, v, ...)$ für alle u, v.
Diese Gruppe heißt die **spezielle pseudoorthogonale Gruppe** $SO(r, s)$.

In einer Normalbasis (n_i) , und dualer Kobasis (N^i) müssen also die Beziehungen gelten:

$$\eta_{ik}\ \gamma^i{}_r \gamma^k{}_s = \eta_{rs} \quad \text{und} \quad Det(\gamma^i_k) = +1 \tag{1.40}$$

Für γ in der Umgebung der Identität hat man $\gamma^i{}_k = \delta^i{}_k + \epsilon.m^i{}_k$, die Matrizen $(m^i{}_k)$ sind eine Darstellung der Lie-Algebra $so(r, s)$; für sie folgen die Beziehungen

$$\eta_{il}\ m^l{}_k + \eta_{kl}\ m^l{}_i = 0, \quad \eta \cdot m \quad \text{sind also schiefe Matrizen} \tag{1.41}$$

Es gibt $n(n-1)/2$ linear unabhängige solche Matrizen, die wir mit l_{ik} bezeichnen ($l_{ki} = -l_{ik}$). Wir definieren die **Standardbasis der $so(r,s)$-Matrizen** folgendermaßen:

$$(l_{ik})^m{}_n := \delta^m{}_k \; \eta_{in} - \delta^m{}_i \; \eta_{kn} \tag{1.42}$$

Als wichtigstes Beispiel für physikalische Anwendungen behandeln wir die Gruppe SO_3, die Drehgruppe in 3 Dimensionen ausführlicher:

Es ist für diesen Fall günstig, die Darstellungsmatrizen einfacher zu bezeichnen: $l_1 := l_{23},\ l_2 := l_{31},\ l_3 := l_{12}$ dann erhält man explizite:

$$l_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Lie- Algebra von $so(3)$ lautet: $[l_1, l_2] = l_3,$ etc. zyklisch. Die Darstellungsmatrix für eine Drehung mit den Euler Winkeln ϕ, θ, ψ hat die Form

$$R = exp(\phi l_3) \cdot exp(\theta l_2) \cdot exp(\psi l_3) = [R^i{}_k] \tag{1.43}$$

Eine häufig nützliche Gleichung ist $R \cdot l_k \cdot R^{-1} = l_i R^i{}_k$ d.h.
$R^m{}_r (l_k)^r{}_s (R^{-1})^s{}_n = (l_i)^m{}_n R^i{}_k$

Der Beweis folgt aus $(R^{-1})^u{}_i \eta^{mi} = R^m{}_r \eta^{ru}$ (R sind orthogonale Matrizen) und
$E_{uvs} (R^{-1})^u{}_i (R^{-1})^v{}_t (R^{-1})^s{}_n = E_{itn}$ $(Det(R) = 1)$.

Die Drehmatrizen $R(\phi, \theta, \psi)$ sind differenzierbare Funktionen ihrer 3 Variablen (es sind matrixwertige Funktionen auf der Gruppenmannigfaltigkeit). Für die Anwendungen braucht man häufig die Maurer-Cartan-Formen G^k, und C^k diese sind definiert als: $l_k \; G^k := R^{-1} \; dR$, $l_k \; C^k := dR \; R^{-1}$
In der Euler-Karte lauten sie explizite:

$$G^1 = sin\psi \; d\vartheta - sin\vartheta \; cos\psi \; d\varphi, \quad C^1 = -sin\varphi \; d\vartheta + sin\vartheta \; cos\varphi \; d\psi \tag{1.44}$$

$$G^2 = cos\psi \; d\vartheta + sin\vartheta \; sin\psi \; d\varphi, \quad C^2 = cos\varphi \; d\vartheta + sin\vartheta \; sin\varphi \; d\psi \tag{1.45}$$

$$G^3 = cos\vartheta \; d\varphi + d\psi, \quad C^3 = d\varphi + cos\vartheta \; d\psi \tag{1.46}$$

Für die physikalischen Anwendungen wichtig ist weiters die Lorentzgruppe SO(1,3), dies ist eine 6-dimensionale Liegruppe. Wir gehen hier nicht näher darauf ein.

Die newtonische Vektorraum-Struktur (Z, h, E)

Für die newtonische Mechanik ist die nun zu besprechende Vektorraum-Struktur grundlegend:
$dim(\mathcal{T}) = 4$, ($\mathcal{T}$ ist der Tangentialraum $T_m(M)$).
Z ist ein gegebenes Element $\neq 0$ in $\mathcal{T}^*$ (Zeit-Struktur)
h ist eine Bilinearform auf $\mathcal{T}^*$ mit den Eigenschaften:
1) $h(A, B) = h(B, A)$, (symmetrisch)
2) $h(Z, A) = 0$ für alle A $\in \mathcal{T}^*$
3) $sign(h) = (0, +, +, +)$, ausgeartet!
E ist die metrische Orientierung, *d.h.* ein gegebenes Element in $\Lambda^4\mathcal{T}^*$, das durch Z und h normiert ist (metrische Orientierung) durch die Bedingung:

$h(u \lrcorner E, v \lrcorner E) =< Z, u). < Z, v)$ für alle $u, v \in \mathcal{T}$

Vermöge Z sind die T-Vektoren in 2 Klassen eingeteilt:

a) $< Z, u) \neq 0$, solche T-Vektoren nennen wir **zeitartige T-Vektoren**.

b) $< Z, r) = 0$, solche T-Vektoren nennen wir **raumartige T-Vektoren**. Die raumartigen T-Vektoren bilden einen 3-dimensionalen Untervektorraum $\mathcal{R}$; in diesem ist vermöge h ein positiv definites Skalarprodukt S induziert. Bevor wir dies zeigen sei einiges über Basen im newtonischen Vektorraum erläutert.

Sei (E^ν) eine Basis in $\mathcal{T}^*$ (Kobasis), (e_ν) die duale Basis in $\mathcal{T}$, wir bezeichnen:

$$Z_\nu := Z(e_\nu) \equiv < Z, e_\nu), \qquad h^{\mu\nu} := h(E^\mu, E^\nu) \tag{1.47}$$

Eine Kobasis (T^0, T^1, T^2, T^3) heißt Z-angepaßt, wenn $T^0 = Z$, die anderen beliebig. In einer Z-angepaßten Kobasis hat man $h^{0a} = h^{a0} = 0$, es bleibt also nur die positiv definite, symmetrische 3x3-Matrix h^{ik} unbestimmt.

Normalbasen zu (Z, h, E):
Ein duales Basen-Paar (N^a) , (n_a) , $a = 0, 1, 2, 3$, heißt normal, wenn folgende 3 Bedingungen erfüllt sind:

$$1)\ N^0 = Z, \quad 2)\ h(N^a, N^b) = \eta^{ab}, \quad 3)\ N^0 \wedge N^1 \wedge N^2 \wedge N^3 = E \tag{1.48}$$

wobei $\eta := Diag(0, +1, +1, +1)$ (newtonische Signaturmatrix).

Je 2 Normalbasenpaare sind über eine Galileimatrix miteinander verknüpft:
Seien (N^a) , (n_a); bzw. $(N^{\bar{a}})$, $(n_{\bar{a}})$; 2 Normalbasen-Paare, dann gilt:

$$N^a = \gamma^a{}_{\bar{a}}\, N^{\bar{a}}, \quad n_{\bar{a}} = n_a \gamma^a{}_{\bar{a}} \tag{1.49}$$

mit einer Matrix der Form:

$$(\gamma^a{}_{\bar{a}}) = \begin{bmatrix} 1,0,0,0 \\ w^1,R,R,R \\ w^2,R,R,R \\ w^3,R,R,R \end{bmatrix} ,\ w^1,\ w^2,\ w^3 \in \mathbb{R},\ \ (R^i{}_{\bar{k}}) \in SO_3$$

Diese Matrizen bilden eine 6-dimensionale Lie-Gruppe, die orthochrone, eigentliche Galileigruppe.

Zur **Definition des Salarproduktes** S **im Untervektorraum** $\mathcal{R}$ der raumartigen Vektoren wählen wir eine beliebige Normalbasis und definieren:

$$S(r,s) := \Sigma_{k=1,2,3} < N^k, r). < N^k, s) \tag{1.50}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß für raumartige Vektoren r, s $S(r,s)$ unabhängig ist von der gewählten Normalbasis.
Insbesondere ist der **Betrag eines raumartigen Vektors** definiert als:

$$|r| := \sqrt{S}(r,r) \tag{1.51}$$

Für zeitartige Vektoren ist keine Länge definiert. Wir können aber normierte zeitartige Vektoren u definieren durch die Bedingung: $< Z, u) = 1$; wir nennen solche Vektoren **Geschwindigkeitsvektoren**.

Die Symmetriegruppe von (Z, h, E)

ist jene Untergruppe von $Gl(4, \mathbb{R})$, die folgende Bedingungen erfüllt:

1) $L^*_\gamma Z = Z$, 2) $h(L^*_\gamma A, L^*_\gamma B) = h(A,B)$ für alle A, B, 3) $L^*_\gamma E = E$

Man überzeugt sich leicht davon, daß dies die **orthochrone eigentliche Galileigruppe** ist. Wir definieren die Standardmatrizen, die eine Basis der Lie-Algebra dieser Gruppe liefern:

$l_{10} = \begin{bmatrix} 0,0,0,0 \\ 1,0,0,0 \\ 0,0,0,0 \\ 0,0,0,0 \end{bmatrix}$, $l_{20} = \begin{bmatrix} 0,0,0,0 \\ 0,0,0,0 \\ 1,0,0,0 \\ 0,0,0,0 \end{bmatrix}$, $l_{30} = \begin{bmatrix} 0,0,0,0 \\ 0,0,0,0 \\ 0,0,0,0 \\ 1,0,0,0 \end{bmatrix}$, $l_{12} = \begin{bmatrix} 0,0,0,0 \\ 0,0,-1,0 \\ 0,1,0,0 \\ 0,0,0,0 \end{bmatrix}$, etc.
zyklisch

Die $\underline{\sharp}$-Abbildung ist vermöge von h definiert; sie ist aber kein Vektorraum Isomorphismus, weil h ausgeartet ist; sie ist ein Homomorphismus vom 4-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{T}^*$ in den 3-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{R}$ der raumartigen T-Vektoren.

Die Urbilder eines Vektors v

Gegeben sei ein linearer Operator L in einem Vektorraum T und ein Vektor $v \in \mathcal{T}$; gesucht sind alle Vektoren $u \in \mathcal{T}$, die der Gleichung genügen

$$Lu = v \tag{1.52}$$

Man sieht, daß alle Vektoren $\in Kern(L)$ einen Untervektorraum $\mathcal{L}$ bilden. Hat dieser die Dimension m , dann ist auch die Lösungsmenge obiger Gleichung m-fach, weil zu jedem Lösungsvektor u_0 ein beliebiger Vektor $\in \mathcal{L}$ addiert werden kann.

Die explizite Lösung wird in einer Basis durchgeführt: Sei $[L^i{}_k]$ die Matrix der Komponenten von L bezüglich der Basis $(e_k)_{k=1,2,..n}$, $v = v^i e_i$, $u = u^k e_k$, dann ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$L^i{}_k u^k = v^i \tag{1.53}$$

das nach bekannten Methoden der linearen Algebra gelöst werden kann.

Eigenwerte und Eigenvektoren von linearen Operatoren in $(\mathcal{T}, G)$

Wir stellen uns die Frage, ob es zu einem gegebenen linearen Operator L einen Vektor v gibt, so daß der Operator L den Vektor v in einen Vektor proportional v überführt?

$$Lv = \lambda v \tag{1.54}$$

Die reelle Zahl λ heißt Eigenwert von L, der Vektor v Eigenvektor zum Eigenwert λ. Im allgemeinen gibt es keine Eigenvektoren, wie man an folgenden einfachen Beispiel sieht:

$$\text{Sei } dim(\mathcal{T}) = 2, \quad (L^i{}_k) = \begin{bmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}$$

In einem Vektorraum $(\mathcal{T}, G)$ mit einem positiv definiten Skalarprodukt G hat man einen wichtigen Satz über G-symmetrische Operatoren:

Ein linearer Operator heißt G-symmetrisch, wenn

$$G(u, Lw) = G(Lu, w), \quad \text{für alle} \quad u, v \in \mathcal{V} \tag{1.55}$$

Bezüglich einer Basis $(e_k)_{k=1,2,..n}$ bedeutet dies, daß die Matrix (L_{ik}) mit den Elementen $L_{ik} := G_{il}L^l{}_k$ symmetrisch ist, d.h. $L_{ik} = L_{ki}$.

Der Satz lautet: Ein G-symmetrischer Operator besitzt n Eigenvektoren, die eine bezüglich G orthonormale Basis bilden.

Physikalische Anwendungen sind z.B. die Hauptachsentransformation für Trägheitstensoren, optische Achsen in Kristallen, etc.

Hilberträume

Ein Hilbertraum $(\mathcal{H}, S)$ der Dimension n ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$, der mit einer **positiv definiten hermiteschen Sesquilinearform** S versehen ist. Die Elemente $\phi, \psi, ... \in \mathcal{H}$ heißen **H-Vektoren**.

Die Sesquilinearform S hat die Eigenschaften:

1) $S(\phi, \psi) = [S(\psi, \phi)]^*$, (hermitesch)

2) $S(\phi, a\psi + b\chi) = aS(\phi, \psi) + bS(\phi, \chi), \quad a, b \in \mathbb{C}$ (sesquilinear)

S ist also linear im rechten Eintrag, antilinear im linken Eingang.

3) $S(\phi, \phi) > 0$ für alle $\phi \neq 0$ (positiv definit).

Sei $(\varphi_\alpha)_{\alpha=1,2,...n}$ eine Basis in $\mathcal{H}$, dann hat ein H-Vektor die Darstellung

$$\psi = \psi^\alpha \varphi_\alpha, \quad \text{Summenkonvention!} \tag{1.56}$$

Das n-Tupel komplexer Zahlen (ψ^α) wird für rechnerische Zwecke als Spaltenmatrix geschrieben.

Wir bezeichnen $S_{\dot\alpha\beta} := S(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)$, die Komponenten von S bezüglich der Basis $(\varphi_\alpha)_{\alpha=1,2,...n}$. Der Punkt über dem Index α soll anzeigen, daß S im ersten Index antilinear ist. Wegen der Hermitezität gilt $S_{\dot\alpha\beta} = S^*_{\dot\beta\alpha}$. Für das Skalarprodukt ergibt sich in einer Basis

$$S(\psi, \phi) = \bar\psi_\beta \phi^\beta, \quad \text{mit der Definition} \quad \bar\psi_\beta := (\psi^\alpha)^* S_{\dot\alpha\beta} \tag{1.57}$$

Wichtig sind die linearen Operatoren in $\mathcal{H}$, darunter besonders die hermiteschen Operatoren. Ein Operator A ist **hermitesch bezüglich** S , wenn gilt

$$S(\psi, A\phi) = S(A\psi, \phi), \quad \text{für alle } \psi, \phi \tag{1.58}$$

Für hermitesche Operatoren gilt der wichtige Satz:

Die Eigenwerte sind reell, die Eigenvektoren bilden eine bezüglich S orthonormale Basis.

Die expliziten Berechnungen werden in einer Basis durchgeführt; wegen der Linearität des Operators $A\psi = \psi^\beta A\varphi_\beta$ genügt die Kenntnis des Operators A auf den Basiselementen

$$A\varphi_\beta = \varphi_\gamma A^\gamma{}_\beta \tag{1.59}$$

Wegen der Hermitezität von A ist die Komponentenmatrix $A_{\dot\alpha\beta} := S_{\dot\alpha\gamma} A^\gamma{}_\beta$ hermitesch, d.h. $A_{\dot\alpha\beta} = A^*_{\dot\beta\alpha}$. Die Eigenwertgleichung führt also auf das komplexe lineare Gleichungssystem

$$A^\alpha{}_\beta \psi^\beta = a \cdot \psi^\alpha, \quad \text{mit dem reellen Eigenwert } a \tag{1.60}$$

das mit den Standardmethoden der linearen Algebra gelöst werden kann. In der Praxis benützt man eine Orthonormalbasis, in einer solchen wird die Matrix $S_{\dot\alpha\beta}$ zur Einheitsmatrix.

Ein Beispiel:

$$[L^\alpha{}_\beta] = \begin{bmatrix} 0, & -i, & 0 \\ i, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{hat die Eigenwerte} \quad +1, 0, -1$$

Die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\psi_+, \psi_0, \psi_{-1}$ haben die Komponenten:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} +1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.61}$$

die Eigenvektoren haben also in der Orthonormalbasis (φ_α) die Darstellung

$$\psi_+ = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2), \quad \psi_0 = \varphi_3, \quad \psi_- = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2)$$

Teil II. Analysis

1.2 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Zunächst einige Bezeichnungen:

Sei $r \in \mathbb{R}^n$, d.h. $r = (r^1, r^2, ..., r^n)$, ein n-Tupel reeller Zahlen. Wir definieren $|r| := \sqrt{((r^1)^2 + (r^2)^2 + ... + (r^n)^2)}$. Zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^n$ werden mit r_α, r_β bezeichnet. $B_{r_0}(\epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet die offene ϵ-Umgebung von r_0, d.h. $B_{r_0}(\epsilon) = \{r : |r - r_0| < \epsilon\}$. Die Projektionsabbildung auf den ersten Eintrag wird mit π^1 bezeichnet: $\pi^1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (r^1, r^2, ..., r^n) \mapsto r^1$ analog sind die Projektionen auf die anderen Einträge $\pi^2, \pi^3, ..., \pi^n$.

Sei f eine Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (r^1, r^2, ..., r^n) \mapsto f(r^1, r^2, ..., r^n)$, dann werden die entsprechenden partiellen Ableitungen bezeichnet:

$$f_{|i} \equiv \frac{\partial}{\partial r^i} f := lim \, \frac{f(r^1, r^2, ..., r^i + \epsilon, ..., r^n) - f(r^1, r^2, ..., r^n)}{\epsilon} \tag{1.62}$$

Mannigfaltigkeit

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit $dim(M) = n$, ein Punkt in M wird m bezeichnet, $m \in M$.

Def.: M ist ein Hausdorff topologischer Raum, in dem jeder Punkt eine offene Umgebung hat, die homeomorph ist zu einer offenen Menge im $\mathbb{R}^n$; außerdem ist auf M eine differnzierbare Struktur erklärt.

Eine **Funktion** auf M ist eine Abbildung $F : M \to \mathbb{R} : m \mapsto F(m)$, sie ordnet jedem Punkt m eindeutig eine reelle Zahl $F(m)$ zu. (eine Funktion auf M wird auch als **Skalarfeld** auf M bezeichnet). Die Menge aller Funktionen auf M wird mit $\mathcal{F}(M)$ bezeichnet. $\mathcal{F}(M)$ hat eine Reihe algebraischer Strukturen: Summe und Produkt zweier Funktionen F, G sind in offenkundiger Weise definiert: $(F+G)(m) := F(m)+G(m)$, $(F \cdot G)(m) := F(m).G(m)$, Multiplikation mit einer reellen Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ ist definiert als $(\alpha \cdot F)(m) := \alpha.F(m)$. Damit sind auch Bildungen wie $sinF$ etc. definiert: $(sinF)(m) := sin(F(m))$.

Karten (=Koordinatensysteme)

Sei $U \subset M$ eine offene Untermenge von M; eine **Karte** von U ist eine Abbildung (Homeomorphismus) von U in den $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^n : m \mapsto \mathbf{x}(m)$.

Die Abbildung $x^1 := \pi^1 \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R} : m \mapsto x^1(m)$ heißt die erste Koordinatenfunktion der Karte $\mathbf{x}$, analog sind die anderen Koordinatenfunktionen $x^2, ..., x^n$ definiert. Vollständig ist eine Karte mit $(U, \mathbf{x}) \equiv (U, x^1, x^2, ..., x^n)$ zu bezeichnen; wir werden aber nur (x^i) schreiben. Wir wollen die Indexmenge i.A. nicht unbedingt $i = 1, ..., n$ wählen, wir schreiben also x^ν, wobei ν aus einer passenden Indexmenge mit n geordneten Elementen ist. Die n reellen Zahlen $(x^\nu(m)) \equiv (r^\nu)$ heißen die Koordinaten des Punktes m in der Karte $\mathbf{x}$.

Eine Karte ist i.A. nur lokal ($U \neq M$), um ganz M abzubilden braucht man einen **Atlas verträglicher Karten**.

2 Karten $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ sind verträglich, wenn die Abbildung $\mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{x}_\beta^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und deren Umkehrung C^∞ Abbildungen sind.

Ein Atlas $\mathcal{A}$ besteht aus einer Überdeckung von M so, daß:
$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha) : \alpha \in I, \cup U_\alpha = M\}$ mit den Eigenschaften:
1) $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta$ sind verträglich für alle $\alpha, \beta \in I$
2) Der Atlas ist maximal bezüglich 1); d.h. wenn $(U, \mathbf{x})$ eine Karte ist, mit $\mathbf{x}$ verträglich mit allen $\mathbf{x}_\alpha$, dann ist $(U, \mathbf{x})$ auch im Atlas.

Diese Eigenschaften definieren die C^∞ differenzierbare Struktur auf M. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit umfaßt also 3 Charakteristika: 1) Eine Punktmenge, 2) eine Hausdorff-Topologie dieser Punktmenge, 3) Eine differenzierbare Struktur.

Ein Skalarfeld S, wird im Bereich einer Karte $\mathbf{x}$ durch die Koordinatenfunktionen (x^ν) ausgedrückt; wir bezeichnen den **Kartenausdruck** von S in der Karte $\mathbf{x}$ mit $S(x^\nu)$.

Beispiel für $n = 2$ (Verallgemeinerung auf größere n ist evident):
Sei $S(x^1, x^2) \equiv S(x^\nu)$ gegeben als

$$S(x^\nu) = (x^1)^2 - 4(x^2)^2$$

das heißt der Wert des Skalarfeldes S im Punkt m ist zu errechnen als

$$S(m) = (x^1(m))^2 - 4(x^2(m))^2 = (r^1)^2 - 4(r^2)^2$$

Kartenwechsel

Betrachten wir 2 Karten: $(U, \mathbf{x})$, $(\bar{U}, \bar{\mathbf{x}})$; der Durchschnitt $V := U \cap \bar{U}$ sei nicht leer. Wir haben auf V die Koordinatenfunktionen $x^1 = \pi^1 \circ \mathbf{x}$, $x^2 = \pi^2 \circ \mathbf{x}$ und die Koordinatenfunktionen $x^{\bar{1}} := \pi^1 \circ \bar{\mathbf{x}}$, $x^{\bar{2}} = \pi^2 \circ \bar{\mathbf{x}}$. Der Kartenwechsel erfolgt nach der **Koordinatentransformation**

$$x^1 = x^1(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}), \quad x^2 = x^2(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}) \tag{1.63}$$

und deren Umkehrung. $x^1(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}})$ ist der Kartenausdruck der Funktion x^1 in der Karte $\bar{\mathbf{x}}$. Ein Beispiel:

$$x^1(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}) = x^{\bar{1}} cos x^{\bar{2}}, \quad x^2(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}) = x^{\bar{1}} sin x^{\bar{2}} \tag{1.64}$$

mit der Umkehrung

$$x^{\bar{1}}(x^1, x^2) = \sqrt{((x^1)^2 + (x^2)^2)}, \quad x^{\bar{2}}(x^1, x^2) = 2arctan \frac{x^2}{\sqrt{((x^1)^2 + (x^2)^2)} + x^1}$$

Der Kartenausdruck $S(x^{\bar{\nu}})$ ergibt sich damit als

$$S(x^{\bar{\nu}}) = \frac{5}{2}(x^{\bar{1}})^2 cos 2x^{\bar{2}} - \frac{3}{2}(x^{\bar{1}})^2$$

Bemerkung: Falls in diesem Beispiel die Karte (x^ν) eine globale Karte ist, dann gibt der Kartenausdruck $S(x^\nu)$ das Skalarfeld S auf ganz M; die Karte $(x^{\bar{\nu}})$ ist aber nicht global (die Punkte m mit $x^1(m) < 0, x^2(m) = 0$ sind nicht drauf), der Kartenausdruck $S(x^{\bar{\nu}})$ gibt also das Skalarfeld S nicht vollständig.

Tangentenvektoren, Tangentialraum $T_m(M)$

Sei v_m ein Tangentenvektor im Punkt m, die Menge aller Tangentenvektoren im Punkt m bilden den n-dimensionalen Vektorraum $T_m(M)$ = Tangentialraum an M im Punkt m.

v_m ist eine lineare Derivation der Algebra $\mathcal{F}(M)$, definiert durch folgende Eigenschaften:

$$1)\ v_m[F+\alpha G] = v_m[F] + \alpha\, v_m[G], \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{Linearität} \tag{1.65}$$

$$2)\ v_m[F \cdot G] = F(m).v_m[G] + G(m).v_m[F] \quad \text{Leibnizregel} \tag{1.66}$$

Man zeigt den Satz: Für eine Funktion C, die in einer Umgebung von m constant ist, gilt $v_m[C] = 0$: Sei I die konstante Funktion mit $I(m) = 1$ für alle m, $C(m) = c$ in der Umgebung von m; dann folgt:
$v_m[C] = v_m[cI] = c.v_m[I] = c.v_m[I \cdot I] = 2c.v_m[I]$

Die Vektorraumstruktur von $T_m(M)$ ist definiert durch:

$$(\alpha\, v_m)[F] := \alpha.v_m[F], \quad (v_m + w_m)[F] := v_m[F] + w_m[F] \tag{1.67}$$

Die Kartenbasis (∂_ν) in $T_m(M)$

Eine Karte (x^ν) erzeugt eine Basis in allen Tangentialräumen $T_m(M), m \in U$; die n linear unabhängigen Tangentenvektoren $(\partial_1)_m, (\partial_2)_m, \ldots.., (\partial_n)_m$ sind definiert durch:

$$(\partial_\nu)_m[F] := \frac{\partial}{\partial r^\nu}(F \circ \mathbf{x}^{-1})|_{\mathbf{x}(m)} \tag{1.68}$$

Daraus folgt für die Wahl $F = x^\mu$ die Gleichung:

$$(\partial_\nu)_m[x^\mu] = \delta^\mu{}_\nu \quad \text{für alle}\, m \in U \tag{1.69}$$

Veranschaulichung der Tangentenvektoren: $(\partial_1)_m$ ist im Punkt m tangential an die Linie, die sich als Schnitt der $n-1$ Hyperflächen $x^2 = const = x^2(m), x^3 = x^3(m), \ldots.x^n = x^n(m)$ ergibt; analog für die übrigen. $(\partial_\nu)_m[F]$ bedeutet anschaulich die Ableitung der Funktion F im Punkt m in Richtung der ν-ten Koordinatenlinie (Richtungsableitung).

Vektorfelder auf M

Ein Vektorfeld v auf M liefert in jedem Punkt $m \in M$ einen Tangentenvektor v_m. Die ∂_ν sind n lokale Vektorfelder, sie liefern in jedem Punkt $m \in U$ n linear unabhängige Tangentenvektoren, also eine Basis in $T_m(M)$. Man sagt, die n lokalen Vektorfelder (∂_ν) sind ein **lokaler Rahmen**. Ein allgemeines Vektorfeld v hat im Bereich einer Karte die Dartstellung

$$v = v^\nu(x^\mu)\ \partial_\nu \tag{1.70}$$

die n Funktionen $v^\nu(x^\mu)$ sind die Kartenausdrücke der Komponenten von v. Der Tangentenvektor $v_m \in T_m(M)$ ergibt sich als $v_m = v^\nu(m)\ (\partial_\nu)_m$

Die Basiswechselmatrix zu einem Kartenwechsel

Seien $(x^\nu), (x^{\bar\nu})$ 2 Karten; in jedem Punkt $m \in U \cap \bar U$ liefert jede Karte eine Basis von $T_m(M)$: die 2 Basen $((\partial_\nu)_m)$ und $((\partial_{\bar\nu})_m)$ sind durch die Basiswechselmatrix $(\tau^\nu{}_{\bar\nu})$ verbunden:

$$(\partial_{\bar\nu})_m = (\partial_\nu)_m \cdot \tau^\nu{}_{\bar\nu} \quad \text{wobei} \quad \tau^\nu{}_{\bar\nu} = \frac{\partial x^\nu(x^{\bar\mu})}{\partial x^{\bar\nu}}|_m \tag{1.71}$$

Ein Beispiel: Für die Koordinatentransformation

$$x^1(x^{\bar 1}, x^{\bar 2}) = x^{\bar 1}, \quad x^2(x^{\bar 1}, x^{\bar 2}) = \beta\, x^{\bar 1} + \gamma\, x^{\bar 2} + \frac{\alpha}{2}(x^{\bar 1})^2 \tag{1.72}$$

folgt $\partial_{\bar 1} = \partial_1 + (\beta + \alpha x^1)\ \partial_2 \neq \partial_1$!! $\partial_{\bar 2} = \gamma\ \partial_2$; in einem Punkt m mit $x^1(m) = r^1$ hat man also

$(\partial_{\bar 1})_m = (\partial_1)_m + (\beta + \alpha r^1)\ (\partial_2)_m, \quad (\partial_{\bar 2})_m = \gamma\ (\partial_2)_m$

Der Kotangentialraum $T^*_m(M)$

ist der Dualraum zu $T_m(M)$; die Elemente $A_m, B_m, ... \in T^*_m(M)$ heißen Kotangentenvektoren. Wir schreiben $< A_m, v_m) \equiv A_m(v_m)$.

Ein **Kovektorfeld** V liefert in jedem Punkt m einen Kotangentenvektor V_m. Ein Kovektorfeld wird auch als **1-Form** bezeichnet.

p-Formen auf M

In den physikalischen Anwendungen sind auch alle alternierenden Tensorprodukte eines Kotangentialraumes von großer Wichtigkeit. Wir bezeichnen den p-fach alternierenden Tensorproduktraum von $T^*_m(M)$ mit $\Lambda^p_m(M)$; die Elemente diese Vektorraumes nennen wir p-Kovektoren. Eine **p-Form** ist ein Feld auf M, das in jedem Punkt m einen p-Kovektor liefert. Die Menge aller p-Formen auf M bezeichnen wir $\Lambda^p(M)$.

Das Differential einer Funktion

Das (äußere) Differential eines Skalarfeldes S auf M wird mit dS bezeichnet. dS ist ein Kovektorfeld (= 1-Form). Die 1-Form dS ist dadurch definiert, daß für jedes Vektorfeld v auf M in jedem Punkt m die Gleichung gilt:

$$< (dS)_m, v_m) = v_m[S] \tag{1.73}$$

Daraus folgert man durch die spezielle Wahl $S = x^\nu$ und $v = \partial_\mu$ die Gleichungen

$$< dx^\nu, \partial_\mu) = \delta^\nu{}_\mu \quad \text{für alle} \quad m \in U \tag{1.74}$$

d.h. die n lokalen 1-Formen (dx^ν) liefern in jedem Punkt m des Kartenbereiches die duale Basis $((dx^\nu)_m)$ zur Tangentenbasis $((\partial_\nu)_m)$

Für eine konstante Funktion C, $(C(m) = \text{const})$ folgt aus (2.12) $d\,C = 0$.

Eine Allgemeine 1-Form (Kovektorfeld) A hat im Bereich der Karte (x^ν) die Kartendarstellung

$$A = A_\nu(x^\mu)\ dx^\nu \tag{1.75}$$

der Kovektor A_m im Punkt m ergibt sich als $A_m = A_\nu(m)\ (dx^\nu)_m$. Die n Funktionen $A_\nu(x^\mu)$ sind die Kartenausdrücke für die Komponenten der 1-Form A.

Für die 1-Form dS folgt aus (2.12) die Kartendarstellung $dS = S_{|\nu}(x^\sigma)\ dx^\nu$. Eine allgemeine 1-Form läßt sich nicht als Differential eines Skalarfeldes darstellen; 1-Formen, die als Differential einer Funktion darstellbar sind heißen **exakte 1-Formen**.

Sei Z eine exakte 1-Form auf M, dann gibt es eine Funktion T auf M so, daß $Z = dT$; die Funktion T ist aber nicht eindeutig bestimmt: auch die Funktionen $\bar{T} = T + C$ mit einer beliebigen konstanten Funktion C geben $Z = d\bar{T}$. Man sieht aber, daß die Aussage $T = const.$, die eine Blätterung von M in $n-1$ dimensionale Untermannigfaltigkeiten definiert, äquivalent ist zur Blätterung, die durch $\bar{T} = const.$ definiert ist.

Ist eine 1-Form A auf M und ein Vektorfeld v auf M gegeben, dann erhält man daraus ein Skalarfeld $S :=< A, v)$. Der Kartenausdruck für S ergibt sich als

$$S(x^\mu) = A_\nu(x^\mu)\ v^\nu(x^\mu) \quad \text{Summe über}\ \nu \tag{1.76}$$

Die Komponentenfunktionen von A und v ergeben sich als

$$A_\nu(x^\mu) =< A, \partial_\nu), \quad v^\nu(x^\mu) =< dx^\nu, v) \tag{1.77}$$

p-Formen auf M

Ein 2-Kovektor im Punkt m hat in der Kartenbasis der $(dx^\mu)_m \wedge (dx^\nu)_m$ die Darstellung

$$F_m = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(m)\ (dx^\mu)_m \wedge (dx^\nu)_m \tag{1.78}$$

Eine 2-Form F auf M hat die Kartendarstellung

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x^\sigma)\ dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{1.79}$$

die $\frac{n(n-1)}{2}$ Funktionen $F_{\mu\nu}(x^\sigma)$ sind die Kartenausdrücke der Komponenten der 2-Form F.

Sind u, v zwei Vektorfelder auf M, dann ist $F(u, v) =: S$ ein Skalarfeld auf M; der Kartenausdruck für S ergibt sich als $S(x^\sigma) = F_{\mu\nu}(x^\sigma) u^\mu(x^\sigma) v^\nu(x^\sigma)$

Die Frage, wie man p-Formen differenzieren und integrieren kann, ist für die physikalischen Anwendungen (Elektrodynamik) von grundlegender Bedeutung. Da alle modernen physikalischen Theorien Feldtheorien sind spielt die Frage, wie man Felder allgemeiner Art differenzieren kann, und welche Felder man worüber integrieren kann eine fundamentale Rolle.

Die Mechanik hat das **Konzept des Massenpunktes** zur Grundlage, wir wenden uns daher zunächst jenen mathematischen Konzepten zu, die in der Mechanik unentbehrlich sind.

Linien in M

Eine Linie $\lambda \in M$ ist eine kontinuierliche 1-dimensionale Punktmenge in M, die (bis auf Ausnahmepunkte) in allen Punkten differenzierbar ist. Differenzierbar in einem Punkt m heißt, daß es bis auf einen Faktor nur 1 Tangentenvektor gibt, der tangential an die Linie ist.

Als Beispiel betrachten wir eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit M, von der die Karten (x^1, x^2) und $(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}})$ mit der Koordinatentransformation (2.11) globale Karten seien. Die Linie λ sei gegeben durch die Gleichung $x^{\bar{2}} = const. \equiv c$. In der Karte (x^1, x^2) lautet die Gleichung für $\lambda : x^2 = \frac{\alpha}{2}(x^1)^2 + \beta x^1 + c\,\gamma$. Wir betrachten den Punkt m mit den Koordinaten $x^{\bar{1}}(m) \equiv r^{\bar{1}} = 0, x^{\bar{2}}(m) \equiv r^{\bar{2}} = c$; in der Karte (x^1, x^2) hat m die Koordinaten $x^1(m) \equiv r^1 = 0, x^2(m) \equiv r^2 = c\,\gamma$. Ein zu λ im Punkt m tangentialer Tangentenvektor ist offensichtlich

$v_m = \omega\ (\partial_{\bar{1}})_m \equiv \omega[(\partial_1)_m + \beta\ (\partial_2)_m]$ mit $\omega \neq 0$.

Wir stellen folgende Fragen:

1) Wie kann man in einem Punkt $m \in \lambda$ einen eindeutigen tangentialen Tangentenvektor $u_m \in T_m(M)$ erhalten ?

2) Wie kann mann die Frage beantworten, ob die Linie λ gerade oder gekrümmt ist ?

3) Wie kann man einem Linienstück (zwischen 2 Punkten m_1, m_2 auf λ) eine Länge zuordnen ?

Offensichtlich braucht man bestimmte geometrische Strukturelemente auf M, mit deren Hilfe diese Fragen beantwortet werden können. Je nach Problemstellung handelt es sich um die dafür notwendigen geometrischen Strukturen; wir werden die betreffenden geometrischen Strukturelemente an 3 Beispielen diskutieren:

a) Die 3-dimensionalen **riemannischen Mannigfaltigkeiten** (M, G, E) mit dem (einfachsten) Spezialfall der euklidischen Mannigfaltigkeit. Hier treten 2 geometrische Strukturelemente auf: G, E.

b) Die 4-dimensionale **newtonische Mannigfaltigkeit** (M, Z, h, E, ∇). Hier treten 4 geometrische Strukturelemente auf: Z, h, E, ∇. Wir nennen diese Mannigfaltigkeit kurz den **newtonischen Zaum** , dieser liegt der Mechanik zu Grunde. (Auch die Maxwell-Hertzsche Elektrodynamik und die Quantenmechanik basieren auf dieser Raum-Zeit-Struktur).

c) Die 4-dimensionale **minkowskische Mannigfaltigkeit** (M, g, E). Hier treten nur 2 geometrische Strukturelemente auf: g, E. Wir nennen diese Mannigfaltigkeit kurz den **minkowskischen Zaum**, dieser liegt seit Einsteins "spezieller" Relativitätstheorie allen modernen physikalischen Theorien zu Grunde.

Kurven nach M

Eine Kurve q ist eine Abbildung von einem Intervall $I \in \mathbb{R}$ nach M,

$q : I \to M : s \mapsto q(s)$. Zu einer Linie λ gibt es ∞ viele Kurven derart, daß das Bild von I die Punktmenge λ ergibt. Die Kartendarstellung einer Kurve q ergibt sich aus der Abbildung $\mathbf{x} \circ q : I \to \mathbb{R}^n$; die Komponenten sind die n Funktionen $q^\nu(s) := (x^\nu \circ q)(s)$. Eine Kurve q liefert in jedem Bildpunkt $q(s)$

einen eindeutigen Tangentenvektor $\dot{q} \in T_{q(s)}$, der tangential ist zur Bildlinie λ. Der Tangentenvektor $\dot{q}$ ist definiert durch

$$\dot{q}[F] := \frac{d}{ds}(F \circ q) \tag{1.80}$$

Wir wählen speziell $F = x^\nu$ und bezeichnen $q^\nu(s) := (x^\nu \circ q)(s)$; die n Funktionen $\dot{q}^\nu(s) := \frac{d}{ds}q^\nu(s)$ sind dann am jeweiligen Punkt $q(s)$ die Komponenten des Tangentenvektors $\dot{q} \in T_{q(s)}$

$$\dot{q} = \dot{q}^\nu(s)\ (\partial_\nu)_{q(s)} \tag{1.81}$$

Hier haben die Ratten leider einige Seiten herausgenagt. Wir werden es reparieren.

Auf der nächsten Seite folgen die Aufgaben zur Vorlesung.

Mathematische Methoden der Physik 2 V3+Ue1 uibk. WS 98/Ro

Aufgaben (WS 1998/99/Ro)

Vorbemerkung

Die mathematische Struktur **Vektorraum** und alle damit verbundenen linearen Strukturen spielen in der Physik eine fundamentale Rolle. Bei den physikalischen Anwendungen kommen verschiedene konkrete Vektorräume vor, deshalb geben wir den Vektoren eines bestimmten Vektorraumes einen charakterisierenden Vornamen. In der folgenden Aufgabe kommen 3 verschiedene Vektorräume vor: $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^*$, $\Lambda^2\mathcal{T}^*$ dementsprechend haben wir es mit 3 Arten von Vektoren zu tun, wir nennen sie: T-Vektoren, T^*-Vektoren 2-T^*-Vektoren.

1) Die newtonische Vektorraumstruktur (Z, h, E)

Sei $\mathcal{T}$ ein reeller Vektorraum der Dimension 2, $\mathcal{T}^*$ der duale Vektorraum, $\Lambda^2\mathcal{T}^*$ der Vektorraum der alternierenden bilinearen Abbildungen von $\mathcal{T}$ nach $\mathbb{R}$.

Es seien 3 geometrische Strukturelemente gegeben: Z, h, E. Dabei ist: $Z \,\epsilon\, \mathcal{T}^*$, $E \,\epsilon\, \Lambda^2\mathcal{T}^*$, h eine symmetrische bilineare Abbildung $h : \mathcal{T}^* \times \mathcal{T}^* \to \mathbb{R},\ (A, B) \mapsto h(A, B)$.

Weiters gelten für diese Strukturelemente die folgenden Eigenschaften:

1. $h(Z, A) = 0$ für alle $A \,\epsilon\, \mathcal{T}^*$,
2. $h(A, A) > 0$ für alle A, die nicht Vielfache von Z sind,
3. $h(u \lrcorner E, v \lrcorner E) = Z(u) \cdot Z(v)$ für alle $u, v \,\epsilon\, \mathcal{T}$.

Zeigen Sie:

Es gibt eine Basis in $\mathcal{T}$: (n_0, n_1) und die dazu duale Basis in $\mathcal{T}^*$: (N^0, N^1), so daß gilt:

$$Z = N^0, \quad h(N^0, N^1) = 0, \quad h(N^1, N^1) = 1, \quad E = N^0 \wedge N^1 \tag{1.82}$$

Ein solches duales Basen-Paar heißt **Normalbasen-Paar** zu Z, h, E.

Zeigen Sie, daß es ∞ viele (eine 1-dimensionale Menge) Normalbasen-Paare gibt, und daß je 2 davon miteinander verbunden sind durch eine Basiswechselmatrix (Übergangsmatrix) γ der folgenden Form:

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{bmatrix}$$

dabei ist $w \,\epsilon\, \mathbb{R}$, eine beliebige reelle Zahl.

Bezeichnet man das 2-te Normalbasen-Paar mit:
$(n_{\bar{0}}, n_{\bar{1}})$, $(N^{\bar{0}}, N^{\bar{1}})$ dann hat man als Relationen zwischen den 2 Basen:

$$n_{\bar{a}} = n_b \gamma^b{}_{\bar{a}},\ N^{\bar{a}} = (\gamma^{-1})^{\bar{a}}{}_b N^b, \qquad N^a = \gamma^a{}_{\bar{b}} N^{\bar{b}},\ n_a = n_{\bar{b}} (\gamma^{-1})^{\bar{b}}{}_a \tag{1.83}$$

Zeigen Sie, daß die Menge der Matrizen γ mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung eine Gruppe ist. (Galileigruppe in 2 Dimensionen)

Mittels Z werden die T-Vektoren in 2 Klassen eingeteilt: in zeitartige bzw. raumartige.

Falls $Z(r) = 0$ ist r ein **raumartiger** T-Vektor;

Falls $Z(w) \neq 0$ ist w ein **zeitartiger** T-Vektor; insbesondere nennen wir einen zeitartigen T-Vektor **Geschwindigkeitsvektor**, falls $Z(u) = 1$ gilt. **Zeigen Sie**: Die raumartigen T-Vektoren bilden einen Untervektorraum $\mathcal{R}$, in dem ein positiv-definites Skalarprodukt $S(r,s) := N^1(r) \cdot N^1(s)$ definiert ist; dieses hängt nicht ab von der Wahl der Normalbasis (N^a).

Sei u ein Geschwindigkeitsvektor, $(n_0, n_1), (N^0, N^1)$ ein Normalbasen-Paar; dann heißt der raumartige T-Vektor $v_N := u - n_0$ der **Relativgeschwindigkeitsvektor zu u** bezüglich des Bezugssystems, das durch das Normalbasen-Paar definiert ist.

Berechnen Sie für den Geschwindigkeitsvektor $u := n_0 + u^1 n_1$ den Betrag der Relativgeschwindigkeit $|v_N|$ und $|v_{\tilde{N}}|$ bezüglich der 2 oben definierten Bezugssysteme.

Verallgemeinerung auf 4 Dimensionen

In der physikalischen Praxis ist der Vektorraum $\mathcal{T}$ 4-dimensional; E ist ein gegebenes Element aus dem 1-dimensionalen Vektorraum $\Lambda^4 \mathcal{T}^*$; es gibt neben dem 6-dimensionalen Vetorraum der 2-T^*-Vektoren auch noch den 4-dimensionalen Vektorraum der 3-T^*-Vektoren. Die Bilinearform h kann auf alle Vektorräume $\Lambda^p \mathcal{T}^*$ ausgedehnt werden.

Man zeigt: Je 2 raumartigen T-Vektoren r, s ist eindeutig ein raumartiger T-Vektor k zugeordnet (Kreuzprodukt-Vektor $\vec{k} = \vec{r} \times \vec{s}$) durch die Definition:

$$k := \underline{\sharp}(s \lrcorner (r \lrcorner (u \lrcorner E))) \tag{1.84}$$

wobei k nicht abhängt von der Wahl des Geschwindigkeitsvektors u.

Der Betrag von k definiert das **Flächenmaß** des raumartigen Parallelogramms, das von r, s aufgespannt wird.

Je 3 raumartige T-Vektoren r, s, t spannen ein raumartiges Parallelotop auf; diesem ist eindeutig eine reelle Zahl ω zugeordnet durch die Definition:

$$\omega := E(u, r, s, t) \tag{1.85}$$

wobei ω nicht von der Wahl des Geschwindigkeitsvektors u abhängt. Falls $\omega > 0$ ist (r, s, t) ein Rechtsdreibein, für $\omega < 0$ ein Linksdreibein.

Der Betrag $|\omega|$ definiert das **Volumen** des Parallelotops.

Bestimmen Sie die **Invarianzgruppe** (Symmetriegruppe) der newtonischen Vektorraum-Struktur.

2) Stetigkeit, Differenzierbarkeit; Wegintegral, Linienlänge
Sei ϕ eine Funktion auf $\mathbb{R}^2$, definiert durch die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2arctan(\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)} + x}) \tag{1.86}$$

a) In welchem Bereich ist diese Funktion stetig und differenzierbar?

b) Zeigen Sie:

$$d\phi = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \tag{1.87}$$

Ist dies eine exakte 1-Form ?

c) Berechnen Sie das **Wegintegral** dieser 1-Form längs des Weges:

$$x + \frac{k}{2} y^2 - a = 0, \quad \text{vom Punkt } (x = a, y = 0) \text{ nach } (x = 0, y =?) \tag{1.88}$$

Berechnen Sie die **Linienlänge** dieses Weges unter der Annahme, daß (x,y) eine euklidische Karte ist.

3) Integralkurven zu einem Vektorfeld
Auf einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit M (diffeomorph zu $\mathbb{R}^2$) sei ein Vektorfeld v gegeben. Explizite sei v gegeben in einer globalen Karte (x, y) von M durch den Kartenausdruck:

$$v = -y \, \partial_x + x \, \partial_y = v^x(x, y) \, \partial_x + v^y(x, y) \, \partial_y \tag{1.89}$$

Bestimmen Sie die Integralkurven zu diesem Vektorfeld.

Wir bezeichnen nun die Koordinatenfunktionen der globalen Karte von M mit (t, x). Bestimmen Sie die Integralkurven zu folgenden Vektorfeldern:

$$1) \qquad v = \partial_t \tag{1.90}$$

$$2) \qquad v = \partial_x \tag{1.91}$$

$$3) \qquad v = t \, \partial_x \tag{1.92}$$

$$4) \qquad v = t \, \partial_x + \frac{x}{c^2} \, \partial_t \qquad \text{wobei} \quad c \, \epsilon \, \mathbb{R} \tag{1.93}$$

Zeichnen Sie in allen Fällen ein Bild der Integralkurven.

4) Geometrische Strukturen: Was ist eine gerade Linie in M ?

Wie oben sei (t, x) eine globale Karte von M; wir wählen noch eine zweite globale Karte von M und bezeichnen sie mit $(\bar{t}, \bar{x})$. Die Koordinatentransformation laute:

$$t = \bar{t}, \qquad x = (1 + 0.8 * sin(3 * \bar{t})) * \bar{x} \tag{1.94}$$

Zeichnen Sie in beiden Karten die 2 Linien λ_1, λ_2 ein, die folgend gegeben sind:

λ_1 ist die Linie $\bar{x} = 2$, $\qquad \lambda_2$ ist die Linie $\bar{x} = -2 + \bar{t}$

Fragen:
a) Sind diese Linien gerade oder krumm?
b) Welche Strukturen auf M braucht man um diese Frage zu entscheiden?
c) Wie kann man einen Abstand der 2 Linien voneiander definieren?
d) Wie kann man einem Linienstück zwischen 2 Punkten auf einer Linie eine Länge zuordnen?

5.) Die Beziehungen zwischen den Tangentenbasen und den Kotangentenbasen 2-er Karten.

Sei $(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ eine globale Karte der Zeit-Raum-Mannig - faltigkeit M. Die 4 Vektorfelder $\partial_t \equiv \partial_0$, $\partial_x \equiv \partial_1$, $\partial_y \equiv \partial_2$, $\partial_z \equiv \partial_3$ definieren einen globalen Rahmen auf M; die 4 Kovektorfelder (1-Formen) $dt \equiv dx^0$, $dx \equiv dx^1$, $dy \equiv dx^2$, $dz \equiv dx^3$ definieren den dualen Korahmen auf M.

Sei $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \equiv (x^{\bar{0}}, x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}}) \equiv (x^{\bar{a}})$ eine andere globale Karte von M , definiert durch die Koordinatentransformation:

$$x^0(x^{\bar{a}}) = x^{\bar{0}}, \quad x^k(x^{\bar{a}}) = R^k{}_{\bar{k}}(x^{\bar{0}})\, x^{\bar{k}} + S^k(x^{\bar{0}}) \tag{1.95}$$

wobei die 3×3-Matrix $R \in SO_3$ (Drehmatrix).

Falls (t,x,y,z) eine galileische Karte (newtonisches Inertialsystem) ist, dann ist die Quer-Karte z.B. das mit der Erde fest verbundene Koordinatensystem.

a) Berechnen Sie die 4 Kovektorfelder $dx^{\bar{a}}$ in der Basis dx^a und umgekehrt.
b) Berechnen Sie die 4 Vektorfelder $\partial_{\bar{a}}$ in der Basis ∂_a und umgekehrt. Lösung:

$$dx^{\bar{0}} = dx^0, \qquad dx^{\bar{k}} = (R^{-1})^{\bar{k}}{}_k\, (dx^k - w^k dx^0) \tag{1.96}$$

$$\partial_{\bar{0}} = \partial_0 + w^k \partial_k, \qquad \partial_{\bar{k}} = \partial_k\, R^k{}_{\bar{k}}(x^0) \tag{1.97}$$

wobei $\quad w^k(x^a) = (\dot{R}R^{-1})^k{}_l\, (x^l - S^l) + \dot{S}^k$

c) Überprüfen Sie die Dualitätsrelationen. Zeigen Sie die Gleichung:
$E := dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx^{\bar{0}} \wedge dx^{\bar{1}} \wedge dx^{\bar{2}} \wedge dx^{\bar{3}}$

d) Spezialisieren Sie auf den einfachen Fall einer rotierenden Scheibe:

$$S^k = 0, \quad R = exp\{\alpha\, l_{12}\}, \quad \alpha(x^0) \tag{1.98}$$

wobei die 3×3-Matrix $l_{12} \equiv l_3$ das Element der Lie-Algebra so_3 ist, das die Drehungen um die 3−Achse erzeugt: $l_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Damit wird $\dot{R}R^{-1} = \Omega(x^0)\, l_3$, wobei $\Omega(x^0) = \dot{\alpha}(x^0)$ die Winkelgeschwindigkeit ist. Weiters erhält man:

$$w^x = -\Omega\, y, \quad w^y = \Omega\, x, \quad w^z = 0; \qquad \partial_{\bar{t}} = \partial_t + \Omega\,(-y\partial_x + x\partial_y), \quad (1.99)$$

$$\partial_{\bar{x}} = \cos\alpha\, \partial_x + \sin\alpha\, \partial_y, \qquad \partial_{\bar{y}} = -\sin\alpha\, \partial_x + \cos\alpha\, \partial_y \qquad (1.100)$$

5a) Zusatzaufgaben für Übungshungrige.

1. Seien $M \doteq \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$, $\mathbf{x}$ eine kartesische Karte (x,y) von M. Es sei q die Kurve mit der Kartendarstellung $\mathbf{x}(q(t)) = (\cos t, \sin t)$, $t \in (-\pi/2, \pi)$ (ein 3/4 Kreis). Geben Sie die Tangentenvektoren $\dot{q}_m \in T_m(M)$ und $\dot{q}_n \in T_n(M)$, wobei $\mathbf{x}(m) = (1,0)$ und $\mathbf{x}(n) = (0,1)$, in der Kartenbasis von $T_m(M)$ und $T_n(M)$ an.

   Nun tuen Sie dasselbe in Polarkoordinaten. Kann man davon sprechen, ob $\dot{q}_m$ und $\dot{q}_n$ parallel sind ? Zeichnen Sie $q(t)$ und die Tangentenvektoren in beiden Koordinatensystemen.

2. Seien $M \doteq \mathbb{R}^3$, $m \in M$ mit $\mathbf{x}(m) = (0,1,0)$ in kartesischen Koordinaten (x^1, x^2, x^3) und

$$\begin{aligned} (x^k \circ q)(t) &= (t, 1, t) \\ (x^k \circ p)(t) &= (\sin t, \cos t, t) \\ (x^k \circ k)(t) &= (\sinh t, \cosh t, t + t^3) \end{aligned}$$

   die Kartendarstellungen von 3 Kurven durch m. Berechnen Sie $\dot{q}_m[F]$, $\dot{p}_m[F]$ $\dot{k}_m[F]$ für die Funktion $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$.

   Geben Sie die Komponenten der Tangentenvektoren in der Kartenbasis der kartesischen Karte an.

3. In $U \subset M \doteq \mathbb{R}^3$ mit der Polarkoordinatenkarte (r, θ, ϕ) benützt man manchmal statt des Kartenrahmens $(\partial_1, \partial_2, \partial_3) \equiv (\partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi)$ den durch die euklidische Metrik normierten Normalrahmen

$$e_1 = \partial_r, \quad e_2 = \frac{1}{r}\partial_\theta, \quad e_3 = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi.$$

   Drücken Sie den dazu dualen Korahmen (E^1, E^2, E^3) mittels den natürlichen Basen in den Kotangentenräumen $(dr, d\theta, d\phi)$ aus.

6.) Das Integral einer 2-Form über einen 2-Weg.

Sei $M \doteq \mathbb{R}^3$, (t, x, y) eine globale Karte von M.

a) Die 2-Form F auf M sei gegeben durch den Kartenausdruck

$$F = \frac{B}{2} e^{-\frac{r^2}{a^2}} \{\omega\ sin(\omega t)[-y\ dt \wedge dx + x\ dt \wedge dy] - 2cos(\omega t)\ (1 - \frac{r^2}{a^2})\ dx \wedge dy\}$$

wobei $B, a, \omega \in \mathbb{R}$; $\qquad r^2 := x^2 + y^2$

Sei $\sigma = \sigma_1 + \mu + \sigma_2$ der geschlossene 2-Weg der “nach außen“ orientierten Zylinderfläche (Radius R, Höhe H) zwischen $t = 0$ und $t = H$ (siehe Skizze).

a1) Berechnen Sie die 2-Weg Integrale

$\Phi_2 := \int_{\sigma_2} F, \quad \Phi_1 := \int_{\sigma_1} F, \quad U := \int_\mu F$. [Hinweis: $(ze^{-z})' = (1-z)e^{-z}$].

a2) Zeigen Sie $\int_\sigma F = 0$.

b) Sei V eine 1-Form auf M mit dem Kartenausdruck

$$V = \frac{B}{2} cos(\omega t)\ e^{-\frac{r^2}{a^2}}\ (y\ dx - x\ dy) \tag{1.101}$$

b1) Berechnen Sie dV.

b2) σ ist Rand $\partial\tau$ des 3-Weges τ, der von der Zylinderfläche berandet wird. Zeigen Sie daß das Resultat a2) aus dem Satz von Stokes folgt.

c) Dasselbe in Zylinderkoordinaten: Karte $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) \equiv (z, r, \varphi)$; die Koordinatentransformation lautet:

$$t(z,r,\varphi) = z, \quad x(z,r,\varphi) = rcos\varphi, \quad y(z,r,\varphi) = rsin\varphi \tag{1.102}$$

Zeigen Sie:

$$F = \frac{B}{2} e^{-\frac{r^2}{a^2}} \{\omega\ sin(\omega t)\ r^2 dt \wedge d\varphi - 2cos(\omega t)\ (1 - \frac{r^2}{a^2})\ rdr \wedge d\varphi\} \tag{1.103}$$

$$V = -\frac{B}{2} cos(\omega z)\ e^{-\frac{r^2}{a^2}} r^2 d\varphi \tag{1.104}$$

Der 2-Weg σ_2 wird dargestellt durch die 2-Kurve $q_2(u,v)$ mit
$q_2^z(u,v) = H, \quad q_2^r(u,v) = u, \quad q_2^\varphi(u,v) = v, \quad \{0 < u \leq R,\ -\pi < v < \pi\}$;

der 2-Weg σ_1 wird dargestellt durch die 2-Kurve $q_1(u,v)$ mit
$q_1^z(u,v) = 0, \quad q_1^r(u,v) = v, \quad q_1^\varphi(u,v) = u, \quad \{0 < v \leq R,\ -\pi < u < \pi\}$;

der 2-Weg μ wird dargestellt durch die 2-Kurve $q_3(u,v)$ mit
$q_3^z(u,v) = v, \quad q_3^r(u,v) = R, \quad q_3^\varphi(u,v) = u, \quad \{0 \leq v \leq H,\ -\pi < u < \pi\}$.

7.) Herleitung von Formeln der Vektoranalysis

auf einer 3-dimensionalen riemannischen Mannigfaltigkeit (M, g, E) aus den Rechenregeln für die äußere Ableitung und den Abbildungen $*, \sharp, \flat$.

Seien $\vec{a}$ und $\vec{j}$ Vektorfelder auf M; in der traditionellen Notation für Ableitungen von Vektorfeldern ist $\mathrm{rot}\vec{a} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{a}$ ein Vektorfeld, $\mathrm{div} j \equiv \vec{\nabla}\vec{j}$ ein Skalarfeld. Wie sind diese kartenfrei definiert?

a) Wir wandeln $\vec{a}$ um in die 1-Form $A := \flat\vec{a}$, davon bilden wir die 2-Form dA. Dann ist $*dA$ eine 1-Form, $\sharp * dA$ also ein Vektorfeld; dieses wird bezeichnet mit $\mathrm{rot}\vec{a}$. Es gilt also

$\boxed{\mathrm{rot}\vec{a} := \sharp * d\flat\vec{a}}$ die 2-Form: $dA =: \mathrm{rot}\vec{a} \cdot d\vec{f}$ (Integral über 2-Weg).

b) Wir bilden die 2-Form $J := \vec{j} \lrcorner E$, davon bilden wir die 3-Form dJ. Dann ist $*dJ$ ein Skalarfeld, dieses wird mit $\mathrm{div}\vec{j}$ bezeichnet. Es gilt also

$\boxed{\mathrm{div}\vec{j} := *d(\vec{j} \lrcorner E)}$ die 3-Form $dJ =: \mathrm{div}\vec{j} \cdot d\tau$ (Integral über 3-Weg).

c) Sei S ein Skalarfeld auf M; mit $gradS \equiv \vec{\nabla} S$ wird ein Vektorfeld bezeichnet (Gradientenfeld von S). Es ist definiert als

$\boxed{\vec{\nabla} S := \sharp dS}$ die 1-Form $dS =: \vec{\nabla} S \cdot d\vec{s}$ (Integral über Weg).

d) Sei $M \doteq \mathbb{R}^3$, und g das kometrische Feld der euklidischen Geometrie auf M; seien (r, ϑ, φ) die Koordinatenfunktionen der Kugelkoordinaten. Ein Vektorfeld sei gegeben durch den Kartenausdruck

$$\vec{a} = a^r(r, \vartheta, \varphi)\partial_r + a^\vartheta(r, \vartheta, \varphi)\partial_\vartheta + a^\varphi(r, \vartheta, \varphi)\partial_\varphi$$

Berechnen Sie $\mathrm{rot}\vec{a}$ und $\mathrm{div}\vec{a}$.

e) Zeigen Sie die folgenden Formeln der Vektoranalysis:

(1) $\mathrm{rot}(S\vec{a}) = \mathrm{grad}S \times \vec{b} + S\,\mathrm{rot}\vec{b}$

(2) $\mathrm{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \mathrm{rot}\vec{b}$

(3) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\vec{a} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}S = 0$

(4) $\mathrm{div}(S\,\mathrm{rot}\vec{b}) = \mathrm{grad}S \cdot \mathrm{rot}\vec{b}$

Hinweis: Benützen Sie die Identitäten
$** = 1, \quad *(*A \wedge B) = *(A \wedge *B) = \vec{a} \cdot \vec{b}, \quad \sharp * (A \wedge B) = \vec{a} \times \vec{b}$

8.) Grundformeln der Elektrodynamik

Sei $\{M, g, E\}$ der minkowskische Zaum. In einer minkowskischen Karte (inertiales Koordinatensystem) $x^0 = ct, x^1, x^2, x^3$ hat man den Rahmen $\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3$ und den dazu dualen Korahmen dx^0, dx^1, dx^2, dx^3. Damit lauten die Komponenten des kometrischen Feldes $g^{ab} := g(dx^a, dx^b) = \eta^{ab}$; die Komponenten des metrischen Feldes $G_{ab} := G(\partial_a, \partial_b) = \eta_{ab}$; die Orientierungs-4-Form lautet $E = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, d. h. ihre Komponenten sind $E_{0123} = 1$ etc. alternierend.

Im folgenden sei A eine 1-Form auf M, F eine 2-Form auf M, j ein Vektorfeld auf M; das innere Produkt $J := j \lrcorner E$ ist eine 3-Form auf M. Die Kartenausdrücke sind:

$$A = A_a(x^b)dx^a = A_0dx^0 + A_1dx^1 + A_2dx^2 + A_3dx^3$$

$$F = \frac{1}{2}F_{ab}dx^a \wedge dx^b =: E^k dx^0 \wedge dx^k - cB^1dx^2 \wedge dx^3 - (zykl.123)$$

$$j = j^a(x^b)\partial_a$$

$*$ bezeichnet die mittels (g, E) definierte Hodge-Abbildung.

Verifizieren Sie die folgenden Relationen:

$$J = j^0dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - j^1dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - (zykl.123) \tag{1.105}$$

$$*A = A_0dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + A_1dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + A_2dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + ... \tag{1.106}$$

$$d * A = (A_{0,0} - A_{k,k}).E; \qquad dJ = (j^a{}_{,a}).E = (\frac{\partial}{\partial t}\rho + div\vec{j}).E \tag{1.107}$$

$$dA = (A_{k,0} - A_{0,k})dx^0 \wedge dx^k - (A_{2,3} - A_{3,2})dx^2 \wedge dx^3 - (zykl.123) \tag{1.108}$$

$$- * F = cB^k dx^0 \wedge dx^k + E^1dx^2 \wedge dx^3 + (zykl.123) \tag{1.109}$$

Es gelte die Gleichung $dF = 0$; lesen Sie daraus die Gleichungen ab:

$$div\vec{B} = 0, \qquad rot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \tag{1.110}$$

Es gelte die Gleichung $F = dA$; lesen Sie daraus ab:

$$E^k = A_{k,0} - A_{0,k}; \qquad cB^1 = A_{2,3} - A_{3,2} \qquad etc.(zykl.123) \tag{1.111}$$

Es gelte die Gleichung $-d * F = \mu_0 cJ$; lesen Sie daraus ab:

$$div\vec{E} = \mu_0 c^2\rho, \qquad rot\vec{B}c - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \mu_0 c\vec{j} \tag{1.112}$$

9.) Wechsel des Inertialsystems

Seien (x^a), $(x^{\bar{a}})$ minkowskische Karten von M; die zugehörige Lorentztransformation sei: $x^a = \lambda^a{}_{\bar{a}} x^{\bar{a}} + c^a$ Die Komponenten der Felder A, F, j transformieren gemäß

$$A_{\bar{a}} = A_a \lambda^a{}_{\bar{a}}, \qquad F_{\bar{a}\bar{b}} = F_{ab} \lambda^a{}_{\bar{a}} \lambda^b{}_{\bar{b}}, \qquad j^{\bar{a}} = (\lambda^{-1})^{\bar{a}}{}_a j^a$$

Wir wählen speziell die Lorentzmatrix:

$$[\lambda^a{}_{\bar{a}}] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = cosh\chi, \quad S = sinh\chi, \quad \frac{w}{c} := tanh\chi$$

Verifizieren Sie die Transformationsformeln:

$$E^1 = E^{\bar{1}}, \quad E^2 = C(E^{\bar{2}} + wB^{\bar{3}}), \quad E^3 = C(E^{\bar{3}} - wB^{\bar{2}}) \tag{1.113}$$

$$B^1 = B^{\bar{1}}, \quad B^2 = C(B^{\bar{2}} - \frac{w}{c^2} E^{\bar{3}}), \quad B^3 = C(B^{\bar{3}} + \frac{w}{c^2} E^{\bar{2}}) \tag{1.114}$$

Betrachten Sie speziell das Feld einer Punktladung e, die am Ort $x^{\bar{k}} = 0$ ruht:

$$E^{\bar{k}}(x^{\bar{a}}) = q\frac{x^{\bar{k}}}{\bar{r}^3}, \qquad B^{\bar{k}} = 0; \qquad (q = \frac{e}{4\pi\epsilon_0})$$

Berechnen Sie das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung durch Ausführung der entsprechenden Lorentztransformation:

$$E^1(t, x^k) = \frac{qC}{R^3}(x^1 - vt), \quad E^2(t, x^k) = \frac{qC}{R^3} x^2, \quad E^3(t, x^k) = \frac{qC}{R^3} x^3$$

$$B^1 = 0, \qquad B^2(t, x^k) = -\frac{v}{c^2} E^3, \qquad B^3(t, x^k) = \frac{v}{c^2} E^2 \tag{1.115}$$

wobei $R := \sqrt{(Cx^1 - Sx^0)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$

10.) Berechnung der Felder $\vec{E}, \vec{B}$, und des Ladungs-Stromdichte Vektorfeldes j aus dem Fotofeld V

Seien $x := x^1$, $y := x^2$, $z := x^3$, $r := \sqrt{x^2 + y^2}$; die 1-Form V (Fotofeld) sei gegeben in der Form:

$V = -h(r)dz$ (zylindersymmetrisches statisches Feld)

Berechnen Sie:

$$d * V = 0 \tag{1.116}$$

$F = dV = ...$ lesen Sie daraus ab:

$$\vec{E} = 0, \qquad \vec{B} = b(r).(-\frac{y}{r}\partial_x + \frac{x}{r}\partial_y) \tag{1.117}$$

$$d * F = d * dV = ...$$

lesen Sie daraus mittels der Gleichung $-d * dV = \mu_0 cJ$ die Ladungsdichte ρ ab und die Stromdichte $\vec{j} = j(r)\partial_z$

11.) Solenoidale Magnetfelder

Wir betrachten Fotofelder der Form: $V = a(r).(ydx - xdy)$

Führen Sie alle Rechnungen durch wie in Aufgabe 10). Untersuchen Sie den Spezialfall $a(r) = \frac{1}{r^2}$; man erhält $cB^z = 2\pi\delta(x)\delta(y)$!

12) Einfache elektrostatische Felder

Aus den Grundgleichungen für Fotofelder ($V^a(x) := \langle dx^a, \sharp V \rangle$)

$$(\Box + \kappa^2)V^a(x) = \mu_0 c j^a(x), \qquad V^a_{,a}(x) = 0 \tag{1.118}$$

ergibt sich für **elektrostatische Fotofelder** die Gleichung

$$\boxed{(-\Delta + \kappa^2)V^0(x) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(x)}$$

Die Grundlösungen dieser partiellen Differenzialgleichung 2. Ordnung:

Sei $f(r) := \frac{sinh\kappa r}{\kappa r}$, $g(r) := \frac{e^{-\kappa r}}{r}$; **zeigen Sie**:

$$(-\Delta + \kappa^2)f = 0, \qquad (-\Delta + \kappa^2)g = 4\pi\delta^3(x) \tag{1.119}$$

Aus der abfallenden Lösung $g(r)$ gewinnt man durch Differenzieren
Elektrostatische Multipolfelder im Außenraum:

a) **Monopolfeld:** $4\pi\epsilon_0 V^0 = eg(r)$

b) **Dipolfeld:** $4\pi\epsilon_0 V^0 = -e^k \frac{\partial}{\partial x^k} g(r) = -g' \frac{\vec{e}\vec{x}}{r}$

c) **Quadrupolfeld:**

$$4\pi\epsilon_0 V^0 = \frac{1}{2}q^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k}g(r) = \frac{1}{2}q^{ik}(\frac{3x^i x^k}{r^2} - \delta_{ik})(-\frac{g^{'}}{r} + \frac{\kappa^2}{3}g) \qquad (1.120)$$

wobei die Spur des Quadrupoltensors $q^{ii} = 0$.

Durch fortgeführtes Differenzieren gewinnt man die elektrostatischen Multipollösungen beliebiger Ordnung.

Aus der regulären Lösung $f(r)$ gewinnt man in analoger Weise
Elektrostatische Multipolfelder für einen Innenraum $r \leq R$.

Statische Magnetfelder

Die Feldgleichungen für die minkowskischen Komponenten $V^k(x^i)$ eines magnetostatischen Fotofeldes lauten:

$$\boxed{(-\Delta + \kappa^2)V^k(x^i) = \mu_0 c j^k(x^i), \quad V^k_{,k}(x^i) = 0}$$

13) Das Magnetfeld eines geraden Drahtes.

Die Stromdichte ist gegeben als $j = I\delta(x)\delta(y)\partial_z$

Berechnen Sie $V^k(x^i)$ und $B^k(x^i)$ $\quad$ ($c\vec{B} := rot\vec{V}$).

***14) Das Magnetfeld einer Kreisschleife**

Eine kreisförmige Drahtschleife mit Radius R sei von einem Gleichstrom der Stärke I durchflossen. Das Stromdichte Vektorfeld lautet also

$$\vec{j} = \frac{I}{R^2}\delta(cos\vartheta)\delta(r - R)\partial_\varphi \qquad (1.121)$$

Berechnen Sie das Fotofeld $\vec{V}$ und das Magnetfeld $\vec{B}$.

15) Magnetische Dipolfelder

Ein magnetisches Diplolfeld (kleine Magnetnadel, Elektron, Proton, Neutron) wird mathematisch beschrieben durch die 1-Form

$$V = \frac{\mu_0}{4\pi}f(r)(y\ dx - x\ dy), \qquad \text{wobei} \quad f(r) = \frac{m}{r^3} \text{ für } r > a \qquad (1.122)$$

Im Bereich $r < a$ hängt die Funktion $f(r)$ von der detaillierten Verteilung der Stromdichte $\vec{j}$ ab, an die das Magnetfeld gebunden ist.

Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}$ und die Fotoenergie im Bereich $r > a$.

16.) Wichtige eindimensionale Fourierintegrale

Wir definieren hier die Fouriertransformierte $\tilde{f}(k)$ einer Funktion $f(x)$ als

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \;\; f(x), \quad \text{d.h.} \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \;\; \tilde{f}(k) \quad (1.123)$$

Das Parsevalsche Theorem hat also die Form:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \;\; f^*(x) g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \;\; \tilde{f}^*(k) \tilde{g}(k) \qquad (1.124)$$

Berechnen Sie die folgenden Fourierintegrale $\tilde{f}(k)$:

$$f(x) = \frac{e^{-\kappa|x|}}{2\kappa} \qquad \tilde{f}(k) = \frac{1}{k^2 + \kappa^2} \qquad (1.125)$$

$$f(x) = \epsilon(x) \; e^{-\kappa|x|} \qquad \tilde{f}(k) = \frac{-2ik}{k^2 + \kappa^2} \qquad (1.126)$$

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2b^2}} e^{iqx}, \qquad \tilde{f}(k) = \sqrt{(2\pi)} \;\; b \; e^{-\frac{b^2}{2}(k-q)^2} \qquad (1.127)$$

Verifizieren Sie in allen 3 Fällen das Parsevalsche Theorem.
Versuchen Sie die Berechnung der Umkehrtransformation.

17.) Wichtige 3-dimensionale Fourierintegrale

Wir definieren hier die Fouriertransformierte $\tilde{f}(\vec{k})$ einer Funktion $f(\vec{x})$ als

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \;\; f(\vec{x}), \quad \text{d.h.} \qquad f(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \;\; \tilde{f}(\vec{k}) \qquad (1.128)$$

Das Parsevalsche Theorem hat also die Form:

$$\int d^3x \;\; f^*(\vec{x}) g(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \;\; \tilde{f}^*(\vec{k}) \tilde{g}(\vec{k}) \qquad (1.129)$$

Berechnen Sie die folgenden Fourierintegrale $\tilde{f}(\vec{k})$:

$$f(\vec{x}) = e^{-Mr}, \qquad \tilde{f}(\vec{k}) = \frac{8\pi M}{(\vec{k}^2 + \kappa^2)^2} \qquad (1.130)$$

$$f(\vec{x}) = \frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r} \qquad \tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{\vec{k}^2 + \kappa^2} \qquad (1.131)$$

wobei $\quad r := \sqrt{(}x^2 + y^2 + z^2), \;\; M \in \mathbb{R}$.

Verifizieren Sie in beiden Fällen das Parsevalsche Theorem.
Versuchen Sie die Berechnung der Umkehrtransformation.

18.) Differentialgleichung lösen durch Fouriertransformation

Die Funktion $S(\vec{x})$ genüge der Gleichung $(-\Delta + \kappa^2)S(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x})$ mit der Randbedingung $S \to 0$ für $r \to \infty$

Aus experimentellen Messungen sei die Funktion $\tilde{\rho}(\vec{k})$ bekannt als

$$\tilde{\rho}(\vec{k}) = \frac{Q}{(1 + \frac{\vec{k}^2}{M^2})^2} \tag{1.132}$$

(Dies gibt die Ladungsdichte eines Protons, "Protonformfaktor")

Für die Fouriertransformierten gilt die Gleichung $\tilde{S}(\vec{k}) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\tilde{\rho}(\vec{k})}{\vec{k}^2+\kappa^2}$

Zeigen Sie:

$$S(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{M^3}{(M^2-\kappa^2)^2}[\frac{M}{r}(e^{-\kappa r} - e^{-Mr}) - \frac{M^2-\kappa^2}{2}e^{-Mr}] \tag{1.133}$$

Die Konstante $\frac{1}{M}$ bedeutet den Ladungsradius des Protons $\simeq 10^{-15}m$. Das Neutron hat ca. den gleichen Radius, es ist aber neutral; wie könnte $\tilde{\rho}(\vec{k})$ aussehen?

19.) Affinzusammenhang und kovariante Ableitung

Sei (M, ∇) eine affine Mannigfaltigkeit, $M \simeq \mathbb{R}^2$, ∇ sei torsionsfrei ;
sei $(x^1, x^2) \equiv (t, x)$ eine globale Karte von M mit $\nabla^k_{lm} = 0$
Sei $(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}})$ eine andere Karte von M , gegeben durch die Koordinatentransformation

$$t(\bar{t}, \bar{x}) = \bar{t}, \quad x(\bar{t}, \bar{x}) = f(\bar{t}, \bar{x}) \tag{1.134}$$

a) Zeigen Sie:

$$\nabla^{\bar{x}}_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{f_{|\bar{t}\bar{t}}}{f_{|\bar{x}}}, \quad \nabla^{\bar{x}}_{\bar{t}\bar{x}} = \frac{f_{|\bar{t}\bar{x}}}{f_{|\bar{x}}}, \quad \nabla^{\bar{x}}_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{f_{|\bar{x}\bar{x}}}{f_{|\bar{x}}} \tag{1.135}$$

Berechnen Sie diese Komponenten explizite für den Fall: $f(\bar{t}, \bar{x}) = \bar{x} + \frac{a}{2}\bar{t}^2$

Ein Vektorfeld u auf M , das für alle v der Gleichung $\nabla_v u = 0$ genügt, heißt Parallelfeld zu ∇.

b) Zeigen Sie, daß die kovarianten Ableitungen der Komponenten eines Parallelfeldes null sein müssen: $u^k{}_{;l} = 0$

c) Zeigen Sie, daß die folgenden 2 Vektorfelder u, v Parallelfelder zu obigem Affinzusammenhang ∇ sind:

$$u = \partial_{\bar{t}} - \frac{f_{\bar{t}}}{f_{\bar{x}}}\partial_{\bar{x}}, \qquad v = \frac{1}{f_{\bar{x}}}\partial_{\bar{x}} \tag{1.136}$$

Rechnen Sie nun die 2 Vektorfelder u, v um auf die Karte (t, x) und zeigen Sie damit, daß sie Parallelfelder sind.

Betrachten Sie das Vektorfeld $w = \frac{\bar{t}}{f_{\bar{x}}}\partial_{\bar{x}}$

Zeigen Sie in beiden Karten, daß dies kein Parallelfeld zu ∇ ist.