1 Bells Local Causality

Nach Travis Norsen, *Bell Locality and the Nonlocal Character of Nature,* Found Phys Lett **19**(7), 2006, 633-55. Notizen zum Seminarvortrag von Gebhard Grübl (SE Math Phys) am 13. 6. 2013.

1.1 Einleitung

Zur Bedeutung von Bells Theorem (BT) sagt Norsen: *...what, exactly, it proves remains widely contested.* Bezüglich der Einschätzung dessen, was BT eigentlich beweist, gibt es 2 Hauptpositionen:

- (i) BT beweist: 'nonlocality is a fact of nature'.
- (ii) BT beweist: 'impossibility of empirically viable local hidden variable alternatives to orthodox quantum theory'.

Dabei sind 'nonlocality of nature' und 'local hidden variable alternatives' jeweils einigermaßen präzise beschriebene, unterschiedliche Ideen. Die 'nonlocality of nature' aus (i) wird von Norsen erklärt, um dann zu zeigen, dass erstens (i) zutrifft und zweitens die Aussage (ii) aus (i) folgt. Der Term 'Localiy' hat im gegenwärtigen Kontext jedoch *nirgends* dieselbe Bedeutung wie in einer relativistischen Quantenfeldtheorie. Er ist daher auch von dem Konzept der 'Signal Locality' zu unterscheiden, die ja mit der No-Sigalling Bedingung[1] identisch ist.

Die Quelle der Uneinigkeit: Der Beweis von BT basiert auf Bells Ungleichung. Diese benutzt Kolmogorov-Simulationen, also Hidden Variable (HV) Modelle der Spin-Singlett W-Maße W_{a,b,ρ_s} auf $\Sigma = \{-1,1\} \times \{-1,1\}$ mit

$$W_{a,b,\rho_s}\left(\{(\varepsilon,\eta)\}\right) = \frac{1-\varepsilon\eta a\cdot b}{4} \text{ für } a,b \in \mathbb{S}^2 \text{ und } (\varepsilon,\eta) \in \Sigma.$$

Eine Version von BT lautet:

Theorem 1 *Sei (Ω, W) ein W-Raum mit stochastischen Variablen $f_a, g_a : \Omega \to \{-1,1\}$ für alle $a \in \mathbb{S}^2$. Dann existieren Punkte $a, b \in \mathbb{S}^2$ mit*

$$W\left(\{\omega \in \Omega : f_a(\omega) = \varepsilon, g_b(\omega) = \eta\}\right) \neq W_{a,b,\rho_s}\left(\{(\varepsilon,\eta)\}\right).$$

Daher die weit verbreitete Meinung, dass Bell die Kolmogorov-Simulation $\left(\Omega, W, \left\{f_a, g_a : a \in \mathbb{S}^2\right\}\right)$ mit den stochastischen Variablen als willkürliche, der QT fremde Struktur eingeführt habe, und sein Theorem daher nur etwas über Theorien mit dieser Struktur sage. Als Advokaten dieser Meinung führt Norsen Wigner und Mermin an.

Norsen teilt Bells Auffassung, dass das EPR Argument, aufgrund der strikten (Anti)Korrelation bei $a = b$, verborgene Parameter, also eine Kolmogorov-Simulation (Ω, W) mit stochastischen Variablen f_a, g_b impliziere, die den Ausgang eines jeden Spin-Singlett Korrelationsexperiments auch für $a \neq b$ festlegen, wenn eine superlumiale Kommunikation über die Magnetfeldrichtungen a

[1] Diese besagt, dass die erste Randverteilung des im nächsten Absatz definiertenW-Maßes W_{a,b,ρ_s} nicht von b und die zweite nicht von a abhängt.

und b zwischen den beiden Raumzeitgebieten der Stern-Gerlach Messungen ausgeschlossen wird. Ohne einen solchen Determinismus wäre im Fall von $a = b$ die strikte Antikorrelation

$$W_{a,a,\rho_s}\left(\{(1,1), (-1,-1)\}\right) = 0$$

unerreichbar. Bells Slogan lautet: From locality to deterministic hidden variables.

Warum lohnt es, diesen Streit zu klären? Norsen sagt: Antwort i) macht die 'Nichlokalität' der QT klar und nimmt den nichtlokalen 'HV-Modellen' ihre Sonderstellung. Sie werden zu ernst zu nehmenden Kandidaten für eine Weiterentwicklung der QT. Anwort ii) hingegen macht die Nichtlokalität zu einem alleinigen Problem der HV-Modelle und hält die QT selbst für lokal. Daher werden die HV-Modelle, um die Lokalität zu retten, ausgeschieden. Dies ist ein vielleicht den Fortschritt hemmender Irrtum.

1.2 Bells Lokalität

Bell hat mehrfach, zB in 'La nouvelle cuisine', versucht, seine Vorstellung von einer 'lokal kausalen Theorie der Singlett Korrelationsexperimente' zu erklären. Norsen versucht es noch einmal. Er nennt Theorien, die Bell als 'locally causal' bezeichnete, einfach 'Bell-local'. Eine Bell-lokale Theorie macht sich von Spin-Singlett Korrelationsexperimenten in raumartig gelegenen Raumzeitgebieten ein folgendermaßen strukturiertes Bild:

1. In einem beschränkten Raum-Zeitgebiet $\mathfrak{C}$ wird ein Paar von zwei Spin-1/2-Teilchen im Spin-Singlettzustand erzeugt. Der Zustand läuft in zwei Raum-Zeit-Schläuchen auseinander. Die Schläuche dringen in den raumartig zueinander liegenden Gebieten $\mathfrak{A}$ bzw $\mathfrak{B}$ durch Stern-Gerlach Apparate, deren Orientierungen a bzw b frei in $\mathbb{S}^2$ wählbare Regelgrößen sind. Das Ergebnis der beiden Stern-Gerlach Abfragen wird mit $(\varepsilon, \eta) \in \{-1,1\} \times \{-1,1\} = \Sigma$ beschrieben.

2. Seien $\mathfrak{E}$ bzw $\mathfrak{F}$ die Schnittgebilde der Vereinigung aller Rückwärtskegel, die von den Punkten in $\mathfrak{A}$ bzw $\mathfrak{B}$ ausgehen, mit einer raumartigen Hyperfläche S. Es gelte $S \cap \mathfrak{A} = S \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$. In $\mathfrak{E}$ bzw $\mathfrak{F}$ sind bei jedem Durchgang des Experiments Bestimmungsstücke $\omega_1 \in \Omega_1$ bzw $\omega_2 \in \Omega_2$ der Theorie lokalisiert[2], die a und b *nicht* festlegen, aber W-Maße $W_{a,b,\omega}$ auf Σ mitbestimmen, sodass $W_{a,b,\omega}\left(\{(\varepsilon, \eta)\}\right)$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\{(\varepsilon, \eta)\}$ bei Vorliegen von $\omega \in \Omega$ ist. Bell bezeichnet $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega$ als Paar von *'vollständigen local beables'*, falls die Theorie keine über (ω_1, ω_2) hinausgehenede Präzisierung der Verhältnisse in $\mathfrak{E}$ bzw $\mathfrak{F}$ kennt.

3. Die Familie der W-Maße $\left\{W_{a,b,\omega} : a, b \in \mathbb{S}^2, \omega \in \Omega\right\}$ heißt Bell-lokal, falls für jedes $(a, b, \omega) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \Omega$ Funktionen $p_{a,\omega} : \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ und

[2] Ω_1, Ω_2 sind endliche Mengen.

$q_{b,\omega} : \{-1,1\} \to \mathbb{R}$ existieren, sodass für alle $(\varepsilon, \eta) \in \Sigma$ gilt

$$\begin{aligned} P_{a,b,\omega}(\varepsilon \mid \eta) &:= \frac{W_{a,b,\omega}(\{(\varepsilon,\eta)\})}{W_{a,b,\omega}(\{(1,\eta),(-1,\eta)\})} = p_{a,\omega}(\varepsilon), \\ Q_{a,b,\omega}(\eta \mid \varepsilon) &:= \frac{W_{a,b,\omega}(\{(\varepsilon,\eta)\})}{W_{a,b,\omega}(\{(\varepsilon,1),(\varepsilon,-1)\})} = q_{b,\omega}(\eta). \end{aligned}$$

Bedingung 3. bedeutet, dass bei einem Singlettkorrelationsexperiment mit den Stern-Gerlachorientierungen a und b die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{(\varepsilon,\eta)\}$ unter der Bedingung, dass $\{(1,\eta),(-1,\eta)\}$ eintritt, sehr wohl von ω nicht aber von η und b abhängt. Bell formuliert, dass ω in einer lokal kausalen Theorie die Größen η und b redundant mache. Ähnlich hängt auch die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{(\varepsilon,\eta)\}$ unter der Bedingung, dass $\{(\varepsilon,1),(\varepsilon,-1)\}$ eintritt, zwar von ω nicht aber von ε und a ab. Man beachte, dass $p_{a,\omega}$ und $q_{b,\omega}$ W-Funktionen auf $\{-1,1\}$ sind, dh es gilt

$$p_{a,\omega}(\pm 1) \geq 0 \text{ und } p_{a,\omega}(-1) + p_{a,\omega}(1) = 1$$

und Analoges für $q_{a,\omega}$.

1.3 Die QT ist nicht Bell-lokal

Proposition 2 *Für jedes W-Maß $W_{a,b,\omega}$ einer Bell-lokalen Familie gilt*

$$W_{a,b,\omega}(\{(\varepsilon,\eta)\}) = p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot q_{b,\omega}(\eta) \;\; \textit{für alle } \varepsilon, \eta \in \{-1,1\}.$$

Proof. Es gilt

$$\begin{aligned} W_{a,b,\omega}(\{(\varepsilon,\eta)\}) &= p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot W_{a,b,\omega}(\{(1,\eta),(-1,\eta)\}) \\ &= p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot [W_{a,b,\omega}(\{(1,\eta)\}) + W_{a,b,\omega}(\{(-1,\eta)\})] \\ &= p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot q_{b,\omega}(\eta) \cdot [\Sigma_{\varepsilon,\eta=\pm 1} W_{a,b,\omega}(\{(\varepsilon,\eta)\})] \\ &= p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot q_{b,\omega}(\eta) \cdot 1. \end{aligned}$$

■

Die QT kennt $\omega = \rho_s$ als die bestmögliche Zustandsbeschreibung eines Spin-Singletts. Das W-Maß W_{a,b,ρ_s} faktorisiert aber nur für $a \cdot b = 0$. Die Familie $\left\{W_{a,b,\rho_s} : a, b \in \mathbb{S}^2\right\}$ ist somit nicht Bell-lokal. Ausführlicher geht's auch so:

Corollary 3 *Seien π_1, π_2 die kanonischen Achsenprojektionen von Σ. Für den Erwartungswert $\mathbb{E}_{a,b,\omega}$ von $\pi_1 \cdot \pi_2$ unter einem W-Maß $W_{a,b,\omega}$ einer Bell-lokalen Familie folgt $\mathbb{E}_{a,b,\omega}(\pi_1 \cdot \pi_2) = \mathbb{E}_{a,b,\omega}(\pi_1) \cdot \mathbb{E}_{a,b,\omega}(\pi_2)$, wobei $\mathbb{E}_{a,b,\omega}(\pi_1)$ konstant in b und $\mathbb{E}_{a,b,\omega}(\pi_2)$ konstant in a ist.*

Das Korollar besagt, dass die Familie $\left\{W_{a,b,\rho_s} : a, b \in \mathbb{S}^2\right\}$ keine Bell-lokale Familie ist, da einerseits

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a,b,\rho_s}(\pi_1 \cdot \pi_2) &= \sum_{\varepsilon,\eta \in \{-1,1\}} \frac{1 - \varepsilon\eta a \cdot b}{4} \cdot \varepsilon\eta = \frac{1 - a \cdot b}{4} \cdot 2 + \frac{1 + a \cdot b}{4} \cdot (-2) \\ &= -a \cdot b \end{aligned}$$

und andererseits $\mathbb{E}_{a,b,\rho_s}(\pi_i) = 0$ gilt, sodass $-a \cdot b = 0$ folgt. Dies aber gilt nicht für alle $a, b \in \mathbb{S}^2$.

1.4 Lokale Kolmogorov Simulation

Sei $\{W_{a,b,\omega} : a, b \in C, \omega \in \Omega\}$ eine Bell-lokale Familie von W-Maßen auf Σ. Dabei sei C eine Menge von lokal in $\mathfrak{A}$ bzw $\mathfrak{B}$ regelbaren Kontrollparametern. Bisher war $C = \mathbb{S}^2$ gewählt. Es existieren somit W-Funktionen $p_{a,\omega}$ und $q_{b,\omega}$ auf $\{-1,1\}$, sodass für alle $a, b \in C$ und für alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$W_{a,b,\omega}(\{(\varepsilon,\eta)\}) = p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot q_{b,\omega}(\eta) \text{ für alle } \varepsilon, \eta \in \{-1,1\}.$$

Proposition 4 *Zu $\{W_{a,b,\omega} : a, b \in C, \omega \in \Omega\}$ existiert ein W-Raum (Λ, W) mit stochastischen Variablen $f_{a,\omega}$ und $g_{b,\omega}$, für die*

$$W_{a,b,\omega}(\{(\varepsilon,\eta)\}) = W(\{\lambda \in \Lambda : f_{a,\omega}(\lambda) = \varepsilon, g_{b,\omega}(\lambda) = \eta\}).$$

Proof. Wähle $\Lambda = [0,1] \times [0,1]$ und als W die Gleichverteilung auf Λ. Setze $f_{a,\omega}, g_{b,\omega} : \Lambda \to \{-1,1\}$ mit

$$\begin{aligned} f_{a,\omega}(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{für } x < p_{a,\omega}(1) \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}, \\ g_{b,\omega}(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{für } y < q_{b,\omega}(1) \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned} W(\{\lambda \in \Lambda : f_{a,\omega}(\lambda) = 1, g_{b,\omega}(\lambda) = 1\}) &= p_{a,\omega}(1) \cdot q_{b,\omega}(1) \\ &= W_{a,b,\omega}(\{(1,1)\}), \\ W(\{\lambda \in \Lambda : f_{a,\omega}(\lambda) = 1, g_{b,\omega}(\lambda) = -1\}) &= p_{a,\omega}(1) \cdot (1 - q_{b,\omega}(1)) \\ = p_{a,\omega}(1) \cdot q_{b,\omega}(-1) &= W_{a,b,\omega}(\{(1,-1)\}). \end{aligned}$$

Für die Fälle $(-1,1)$ und $(-1,-1)$ folgt die Behauptung ganz analog. ■

Sei W' das Produkt-W-Maß $W \times M$ auf $\Omega' = \Lambda \times \Omega$ mit $M(\{\omega\}) = \mu(\omega)$. Dabei ist $\mu : \Omega \to [0,1]$ die beliebig gewählte Dichte von M. Seien weiter $f_a, g_b : \Omega' \to \{-1,1\}$ mit

$$\begin{aligned} f_a((x,y),\omega) &= \begin{cases} 1 & \text{für } x < p_{a,\omega}(1) \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}, \\ g_b((x,y),\omega) &= \begin{cases} 1 & \text{für } y < q_{b,\omega}(1) \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Dann folgt für das W-Maß W'

Proposition 5

$$W'(\{\omega' \in \Omega' : f_a(\omega') = \varepsilon, g_b(\omega') = \eta\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) W_{a,b,\omega}(\{(\varepsilon,\eta)\}).$$

Dh: Jede konvexe Kombination von W-Maßen einer Bell-lokalen Familie besitzt eine lokale K-Simulation.

1.5 Bell-Lokalität plus strikte Korrelation

Norsen geht nun der Frage nach, welche Schlüsse aus einem Bell-lokalen Modell mit strikter Antikorrelation zu ziehen sind. Sei also $\left\{W_{a,b,\omega} : a, b \in \mathbb{S}^2, \omega \in \Omega\right\}$ eine Bell-lokale Familie von W-Maßen. Weiter gelte für alle $a \in \mathbb{S}^2$, für alle $\omega \in \Omega$, dass $W_{a,a,\omega}\left(\{(1,1),(-1,-1)\}\right) = 0$. Wegen

$$0 = W_{a,a,\omega}\left(\{(\varepsilon,\varepsilon)\}\right) = p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot q_{a,\omega}(\varepsilon)$$

gilt somit für $a \in \mathbb{S}^2, \omega \in \Omega$ und $\varepsilon \in \{-1,1\}$ zumindest eine der beiden Aussagen:

1. $p_{a,\omega}(\varepsilon) = 0$,
2. $q_{a,\omega}(\varepsilon) = 0$.

Aus der Annahme, dass *beide* Gleichungen gelten, folgt der Widerspruch

$$0 = W_{a,a,\omega}\left(\{(-\varepsilon,-\varepsilon)\}\right) = p_{a,\omega}(-\varepsilon) \cdot q_{a,\omega}(-\varepsilon) = (1 - p_{a,\omega}(\varepsilon)) \cdot (1 - q_{a,\omega}(\varepsilon)) = 1$$

Somit gilt für jedes Tripel $(a,\omega,\varepsilon) \in \mathbb{S}^2 \times \Omega \times \{-1,1\}$ genau eine der beiden Gleichungen 1. und 2. Eine dazu äquivalente Alternative ist: Für $a \in \mathbb{S}^2, \omega \in \Omega$ und $\varepsilon \in \{-1,1\}$ gilt genau eine der beiden Gleichungen:

- $p_{a,\omega}(\varepsilon) = 1$,
- $q_{a,\omega}(\varepsilon) = 1$.

Damit sind die Funktionen $f_a, g_a : \Omega \to \{-1,1\}$ mit

$$f_a(\omega) = -g_a(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } p_{a,\omega}(1) = 1 \\ -1 & \text{für } q_{a,\omega}(1) = 1 \end{cases}$$

wohldefiniert. Die Funktionen$\left\{f_a : a \in \mathbb{S}^2\right\}$ und $\left\{g_a : a \in \mathbb{S}^2\right\}$ existieren somit für jede Bell-lokale Familie von W-Maßen mit strikter Antikorrelation.

Es gilt offenbar

$$\begin{aligned} p_{a,\omega}(\varepsilon) &= 1 \Rightarrow f_a(\omega) = \varepsilon, \\ q_{a,\omega}(\varepsilon) &= 1 \Rightarrow g_a(\omega) = \varepsilon. \end{aligned} \tag{1}$$

Lemma 6 *Für die bedingten W-Funktionen* $p_{a,\omega}$ *und* $q_{a,\omega}$ *eines Bell-lokalen Modells mit strikter Antikorrelation gilt:* $p_{a,\omega}(\varepsilon) = 1 \Rightarrow q_{a,\omega}(\varepsilon) = 0$ *und* $q_{a,\omega}(\varepsilon) = 1 \Rightarrow p_{a,\omega}(\varepsilon) = 0$.

Proof. Aus

$$0 = W_{a,a,\omega}\left(\{(\varepsilon,\varepsilon)\}\right) = p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot q_{a,\omega}(\varepsilon) = 1 \cdot q_{a,\omega}(\varepsilon)$$

folgt die erste Implikation und aus

$$0 = W_{a,a,\omega}\left(\{(\varepsilon,\varepsilon)\}\right) = p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot q_{a,\omega}(\varepsilon) = p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot 1$$

die zweite. ■

Daher bestehen für die Funktionswerte $p_{a,\omega}(\varepsilon)$ und $q_{a,\omega}(\varepsilon)$ eines Bell-lokalen Modells die folgenden zwei erschöpfenden Alternativen:

Corollary 7 *Für die bedingten W-Funktionen $p_{a,\omega}$ und $q_{a,\omega}$ eines Bell-lokalen Modells mit strikter Antikorrelation gilt für $a, b \in \mathbb{S}^2, \omega \in \Omega$ und $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ genau eine der beiden Aussagen:*

(i) $p_{a,\omega}(\varepsilon) = 1$ und $q_{a,\omega}(\varepsilon) = 0$,

(ii) $q_{a,\omega}(\varepsilon) = 1$ und $p_{a,\omega}(\varepsilon) = 0$.

Zu jedem Tripel $(a, b, \omega) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \Omega$ existiert genau ein Punkt $(\varepsilon, \eta) \in \Sigma$ mit $p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot q_{b,\omega}(\eta) = 1$.

Lemma 8 *Für die Funktionen f_a, g_a eines Bell-lokalen Modells mit strikter Antikorrelation gilt für $a, b \in \mathbb{S}^2, \omega \in \Omega$ und $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$*

$$p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot q_{b,\omega}(\eta) \cdot \varepsilon \cdot \eta = \begin{cases} f_a(\omega) \cdot g_b(\omega) & \text{für } p_{a,\omega}(\varepsilon) = q_{b,\omega}(\eta) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Proof. Nach Korrolar 7 gilt

$$p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot q_{b,\omega}(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{für } p_{a,\omega}(\varepsilon) = 1 = q_{b,\omega}(\eta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für $p_{a,\omega}(\varepsilon) = 1 = q_{b,\omega}(\eta)$ aber gilt nach Gleichung (1)

$$f_a(\omega) = \varepsilon \text{ und } g_b(\omega) = \eta.$$

■

Sei nun $W_{a,b}$ eine Mischung von W-Maßen aus $\{W_{a,b,\omega} : \omega \in \Omega\}$. Diese ist durch ein W-Maß auf Ω mit einer Verteilungsfunktion $\mu : \Omega \to [0, 1]$ gegeben. Und zwar so:

$$W_{a,b} = \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) \cdot W_{a,b,\omega} \text{ mit } \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) = 1.$$

Der Erwartungswert von $\pi_1 \cdot \pi_2$ unter dem W-Maß $W_{a,b}$ ist durch

$$\mathbb{E}_{a,b}(\pi_1 \cdot \pi_2) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) \sum_{\varepsilon, \eta \in \{-1,1\}} W_{a,b,\omega}(\{(\varepsilon, \eta)\}) \cdot \varepsilon \cdot \eta$$

gegeben. Für ihn folgt

Proposition 9 *Für den Erwartungswert $\mathbb{E}_{a,b}(\pi_1 \cdot \pi_2)$ eines strikt antikorrelierten Bell-lokalen Modells gilt*

$$\mathbb{E}_{a,b}(\pi_1 \cdot \pi_2) = -\sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) \cdot f_a(\omega) \cdot f_b(\omega).$$

Proof. Nach Satz 2 gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a,b}(\pi_1 \cdot \pi_2) &= \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) \sum_{\varepsilon, \eta \in \{-1,1\}} W_{a,b,\omega}(\{(\varepsilon, \eta)\}) \cdot \varepsilon \cdot \eta \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) \sum_{\varepsilon, \eta \in \{-1,1\}} p_{a,\omega}(\varepsilon) \cdot q_{b,\omega}(\eta) \cdot \varepsilon \cdot \eta. \end{aligned}$$

Nach Lemma 8 hat von den vier Summanden in

$$\sum_{\varepsilon,\eta\in\{-1,1\}} p_{a,\omega}(\varepsilon)\cdot q_{b,\omega}(\eta)\cdot\varepsilon\cdot\eta$$

genau einer den Wert $f_a(\omega)\cdot g_b(\omega)$ und alle anderen den Wert 0. Daher folgt

$$\mathbb{E}_{a,b}(\pi_1\cdot\pi_2)=\sum_{\omega\in\Omega}\mu(\omega)\cdot f_a(\omega)\cdot g_b(\omega)=-\sum_{\omega\in\Omega}\mu(\omega)\cdot f_a(\omega)\cdot f_b(\omega).$$

■

Damit ist der Ausgangspunkt von Bells ursprünglicher Arbeit erreicht, und der Beweis seines Theorems über Bells Ungleichung kann geführt werden.

1.6 Zusammenfassung

Die Hoffnung, dass die Lokalität der QT durch Verzicht auf irgendeine Art von 'Realismus' zu halten sei, ist illusorisch, *falls* unter Lokalität Bells Lokalität gemeint ist. Denn jede Bell-lokale Familie von W-Maßen $\{W_{a,b,\rho_s}: a,b\in\mathbb{S}^2\}$ mit strikter Korrelation ist so, dass die aus ihr durch eine Mischung ableitbaren Korrelationen $\mathbb{E}_{a,b}(\pi_1\cdot\pi_2)$ Bells Ungleichung erfüllen. Daher kann

$$\mathbb{E}_{a,b}(\pi_1\cdot\pi_2)=-a\cdot b$$

nicht für alle $a,b\in\mathbb{S}^2$ gelten, sodass ein Bell-lokales Modell der Spin-Singlett Korrelationen nicht existiert.

1.7 Kritik

Die Definition der Bell-Lokalität ist keine mathematisch scharfe, da sie von unausformulierten und daher vagen Theorie-Klassen ausgeht. Was Bell unter einer 'Beable' versteht, kann vermutlich nicht mit mathematischer Präzision gesagt werden. Daher bin ich im Zweifel, ob Bell-Lokalität ein gutes Werkzeug ist.

Die Diskussion um die eingangs erwähnten Positionen (i) und (ii) leidet wohl auch darunter, dass die Advokaten eines Antirealismus nicht genau sagen, woran ein 'realistisches' von einem 'antirealistischen' Modell zu unterscheiden ist.