Die Mathematik des Beamens

Gebhard Grübl
Institut für Theoretische Physik, Universität Innsbruck
23. Jänner 2004

Etwas Lineare Algebra:

Sei V ein $\mathbb{C}$-VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\dim(V) < \infty$. Die Menge der symmetrischen linearen Abbildungen $A : V \to V$ wird mit $\mathcal{L}_s$ bezeichnet. Für $A : V \to V$ ist $\sigma(A) = \{a \in \mathbb{C} \,|\ker(A-a) \neq 0\}$ das Spektrum von A und $P_a^A : V \to V$ bezeichne für $a \in \sigma(A)$ die Orthogonalprojektion auf $\ker(A-a)$, den Eigenraum von A zum Eigenwert a. Für $A \in \mathcal{L}_s$ gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ und $P_a^A P_{a'}^A = \delta_{aa'} P_a^A$. Weiters

$$\sum_{a\in\sigma(A)} P_a^A = id_V, \qquad \sum_{a\in\sigma(A)} aP_a^A = A.$$

Für $A, B \in \mathcal{L}_s$ mit $[A,B] := AB - BA = 0$ gilt $P_a^A P_b^B = P_b^B P_a^A$ ...Orthogonalprojektion auf $\ker(A-a) \cap \ker(B-b)$. Allgemeiner: Sei $(A_1, ..., A_n)$ eine Folge in $\mathcal{L}_s$ mit $[A_i, A_j] = 0 \ \forall i,j$, dann ist $P_{a_1}^{A_1} ... P_{a_n}^{A_n}$ die Orthogonalprojektion auf $\ker(A_1 - a_1) \cap ... \cap \ker(A_n - a_n)$. Falls dies nicht die 0-Abbildung ist, heißt $(a_1, ...a_n)$ simultanes Eigenwert-n-tupel der Folge $(A_1, ..., A_n)$.

P-Maße der QT:

Sei $v \in V\backslash 0$ und $A \in \mathcal{L}_s$. Dann ist die Abbildung

$$q_v^A : pot\,(\sigma(A)) \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto \sum_{a\in X} \frac{\left\|P_a^A v\right\|^2}{\|v\|^2}$$

ein p-Maß auf $\sigma(A)$.

Die QT hat für q_v^A die folgende Verwendung: v modelliert den Zustand eines Systems und A eine Vermessungsprozedur, der das System ausgesetzt werden kann. Die möglichen Ergebnisse der Vermessungsprozedur werden mit $\sigma(A)$ identifiziert. $q_v^A\,(X)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer „Messung von A am Zustand v“ das Ergebnis in der Teilmenge X von $\sigma(A)$ liegt.

Verallgemeinerung: Sei $v \in V\backslash 0$ und $(A_1, ...A_n)$ eine Folge in $\mathcal{L}_s$ .Dann ist die Abbildung

$$q_v^{(A_1,...A_n)} : pot\,(\sigma(A_1) \times ... \times \sigma(A_n)) \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto \sum_{(a_1,...a_n)\in X} \frac{\left\|P_{a_n}^{A_n} ... P_{a_1}^{A_1} v\right\|^2}{\|v\|^2}$$

ein p-Maß auf $\sigma(A_1) \times ... \times \sigma(A_n)$. Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash 0$ gilt $q_{\lambda v}^{(A_1,...A_n)} = q_v^{(A_1,...A_n)}$. Daher kann im Folgenden oEdA $\|v\| = 1$ vorausgesetzt werden.

Die QT hat für $q_v^{(A_1,...A_n)}$ die folgende Verwendung: In rascher Abfolge werden hintereinander am Zustand v die Messungen erst A_1, dann A_2, usw. ausgeführt. $q_v^{(A_1,...A_n)}(X)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Folge der Messwerte $(a_1, ...a_n)$ in X liegt.

Gewisses Unbehagen erzeugt die Definition von $q_v^{(A_1,...A_n)}$ im Bereich einer relativistischen Quantentheorie. Denn diese kennt keine absolute Zeit, zur Formulierung einer eindeutigen zeitlichen Reihung. Mithilfe der lokalen Observablen lässt sich die Definition jedoch zumindest in gewissen Fällen nachbilden.

Allgemeine Eigenschaften dieser p-Maße:

1. Eine Kontrollmessung reproduziert den vorher gefundenen Wert:

$$q_v^{(A,A)}\,(\{(a,a)\}) = q_v^A\,(\{a\}) \quad \forall a \in \sigma(A).$$

2. Konsistenz mit erster Randverteilung:

$$\sum_{b\in\sigma(B)} q_v^{(A,B)}\,(\{(a,b)\}) = q_v^A\,(\{a\}) \quad \forall a \in \sigma(A).$$

3. Inkonsistenz mit zweiter Randverteilung: Im allgemeinen gilt

$$\sum_{a\in\sigma(A)} q_v^{(A,B)}\left(\{(a,b)\}\right) \neq q_v^B\left(\{b\}\right) \quad \text{für } b\in\sigma(A).$$

   Die A Messung beeinflusst die darauffolgende B Messung.

4. Sei für die Folge (A,B,A) und $a\in\sigma(A)$ die Menge $X_a=\{a\}\times\sigma(B)\times\{a\}$. Dann gilt

$$q_v^{(A,B,A)}\left(X_a\right) \leq q_v^A\left(\{a\}\right).$$

   Im allgemeinen gilt das Gleichheitszeichen nicht. Die Messung von B zerstört den von der ersten A Messung gelieferten Wert. Schrödinger vergleicht dies mit einem nervösen Prüfling.

Spezialisierung auf kommensurable Observable:

Sei die Folge $\mathfrak{A}:=(A_1,...A_n)$ in $\mathcal{L}_s$ so, dass $[A_i,A_j]=0$ für alle i,j. Dann gilt für alle $a_i\in\sigma(A_i)$, $a_j\in\sigma(A_j)$, dass $\left[P_{a_i}^{A_i},P_{a_j}^{A_j}\right]=0$. Sei $\pi\in S_n$ eine Permutation von $(1,..,n)$ und

$$\pi\left(a_1,...a_n\right)=\left(a_{\pi(1)},...a_{\pi(n)}\right), \quad \pi\left(A_1,...A_n\right)=\left(A_{\pi(1)},...A_{\pi(n)}\right).$$

Dann gilt für $X\subset\sigma(A_1)\times...\sigma(A_n)$, dass

$$q_v^{\pi\mathfrak{A}}\left(\pi\left(X\right)\right)=q_v^{\mathfrak{A}}\left(X\right).$$

Die zeitliche Reihenfolge kommutierender Messungen ist irrelevant. Man spricht daher von simultaner Messbarkeit und die Messungen heißen kommensurabel.

Allgemeine Eigenschaften von $q_v^{\mathfrak{A}}$:

1. Nachfolgende Messung wird nicht gestört (Konsistenz mit zweiter Randverteilung): Für $A,B\in\mathcal{L}_s$ mit $[A,B]=0$ folgt:

$$\sum_{a\in\sigma(A)} q_v^{(A,B)}\left(\{(a,b)\}\right) = q_v^B\left(\{b\}\right) \quad \text{für } b\in\sigma(A).$$

2. Vorhergendes Messergebnis wird nicht zerstört: Für $A,B\in\mathcal{L}_s$ mit $[A,B]=0$ und $a\in\sigma(A)$ und die Menge $X_a=\{a\}\times\sigma(B)\times\{a\}$folgt

$$q_v^{(A,B,A)}\left(X_a\right) = q_v^A\left(\{a\}\right).$$

3. Sei $A,B\in\mathcal{L}_s$ mit $[A,B]=0$ und $a\in\sigma(A), b\in\sigma(B)$. Dann folgt aus $\ker(A-a)\cap\ker(B-b)=0$

$$q_v^{(A,B)}\left(\{(a,b)\}\right)=0.$$

   $q_v^{(A,B)}$ ist also auf jenen Eigenwertdupeln lokalisiert, zu denen ein Vektor $x\in V\backslash 0$ existiert, sodass $Ax=ax$ und $Bx=bx$. Ein solches Eigenwertdupel heißt simultanes Eigenwertdupel von (A,B). Für einen solchen Vektor x gilt: $q_x^{(A,B)}$ ist Punktmaß in (a,b). Analoges gilt für n-tupel.

Existieren total streuungsfreie Vektoren v?

Gibt es einen Vektor $v\in V\backslash 0$, sodass für jedes $A\in\mathcal{L}_s$ das p-Maß q_v^A ein Punktmaß ist? Nein. Das wird landläufig als nichtelimierbarer Indeterminismus der QT bezeichnet.

Kolmogorov-Simulation von v:

Sei $l\left(M\right)$ die Menge aller endlichen Folgen in einer Menge M. Sei Ω eine Menge von Abbildungen des Typs

$$\omega: l\left(\mathcal{L}_s\right)\to l\left(\mathbb{R}\right), \quad \omega(A_1,...A_n)=\left(\omega^1\left(A_1\right),\omega^2\left(A_1,A_2\right),..\omega^n\left(A_1,...A_n\right)\right)$$

mit $\omega^i(A_1,...A_i) \in \sigma(A_i)$. Sei μ ein p-Maß auf Ω. Dann ist die folgende Abbildung

$$\mu^{(A_1,...A_n)} : pot\left(\sigma(A_1) \times ... \times \sigma(A_n)\right) \to \mathbb{R},$$
$$X \mapsto \mu\left(\{\omega \,|\omega(A_1,...A_n) \in X\}\right)$$

ein p-Maß von $\sigma(A_1) \times ... \times \sigma(A_n)$.

Offenes Problem: Existiert eine Kolmogorov-Simulation von v, d.h. ein p-Maß μ, sodass für alle $(A_1,...A_n) \in l(\mathcal{L}_s)$ gilt, dass $\mu^{(A_1,...A_n)} = q_v^{(A_1,...A_n)}$?

Notwendig für ein JA ist, dass ein p-Maß μ existiert, sodass für alle $A, B \in \mathcal{L}_s$ mit $[A,B] = 0$ gilt, dass $\mu^{(A,B)} = q_v^{(A,B)}$. Das Maß $q_v^{(A,B)}$ ist auf den simultanen Eigenwertpaaren von (A,B) lokalisiert. Daraus folgt, dass die Menge $\Omega' \subset \Omega$ von Elementen ω mit $\ker\left(A - \omega^1(A)\right) \cap \ker\left(B - \omega^2(A,B)\right) = 0$ für ein kommutierendes Paar (A,B) das Maß 0 hat: $\mu(\Omega') = 0$. Für fast alle ω gilt somit für alle Paare (A,B): Das Paar $\left(\omega^1(A), \omega^2(A,B)\right)$ ist ein simultanes Eigenwertpaar von (A,B). Manche sehen nun die Bedingung

$$\omega \in \Omega \setminus \Omega' \Rightarrow \omega^2(A,B) = \omega^1(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{L}_s \text{ mit } [A,B] = 0$$

als plausibel an. Sie sagt, dass das Ergebnis einer Messung von B nicht davon beeinflusst ist, ob zuvor eine mit B kommutierende Observable A gemessen wird oder nicht. Sie impliziert die Tatsache, dass die zweite Randverteilung von $\mu^{(A,B)} = q_v^{(A,B)}$ mit $\mu^B = q_v^B$ übereinstimmt. Die Bedingung heißt „Nichtkontextualität“. In diesem Fall müssen die Abbildungen $\omega^1 : \mathcal{L}_s \to \mathbb{R}$ somit die Eigenschaft haben, dass für alle $A, B \in \mathcal{L}_s$ mit $[A,B] = 0$ gilt, dass $\ker\left(A - \omega^1(A)\right) \cap \ker\left(B - \omega^1(B)\right) \neq 0$, d.h. die Bilder zweier kommutierender Observablen unter ω^1 bilden ein simultanes Eigenwertpaar dieser Observablen.

Satz 1 (Gleason, Bell, Kochen & Specker) *Sei* $\dim(V) > 2$ *und* $f : \mathcal{L}_s \to \mathbb{R}$ *. Dann existieren* $A, B \in \mathcal{L}_s$ *mit* $[A,B] = 0$ *und* $\ker(A - f(A)) \cap \ker(B - f(B)) = 0$.

Also gibt es keine nichtkontextuelle Kolmogorov-Simulation aller p-Maße in $\left\{q_v^{(A,B)} \mid A, B \in \mathcal{L}_s\right\}$.

Bells Nichtlokalität:

Sei nun $V = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ und $\underline{e} = (e_1, e_2)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$. Zwei elementare Kreisel (Atome, Photonen,...) können weit voneinander entfernt sein. Ihr Rotationszustand sei

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1\right).$$

Für $a = (a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^3$ mit $|a| = 1$ entspricht die lineare symmetrische Abbildung

$$A_1 := \tau(a) \otimes I : V \to V \text{ mit } M(\tau(a), \underline{e}) = \begin{pmatrix} a^3 & a^1 - ia^2 \\ a^1 + ia^2 & -a^3 \end{pmatrix}$$

einer Messung, die in einer kleinen Umgebung von Atom 1 ausführbar ist. Analog ist $B_2 := I \otimes \tau(b)$ in einer kleinen Umgebung von Atom 2 ausführbar. Es gilt $[A_1, B_2] = 0$ und $\sigma(A_1) = \{1, -1\} = \sigma(B_2)$. Alle Paare in $\sigma(A_1) \times \sigma(B_2)$ sind simultane Eigenwertpaare und das von v erzeugte p-Maß erfüllt.

$$q_v^{(A_1,B_2)}\left(\{(i,j)\}\right) = \frac{1 - ija \cdot b}{4} \text{ für } i, j \in \{1, -1\}.$$

Frage: Gibt es eine Menge Ω von Abbildungen $\omega : S^2 \times S^2 \to \{1,-1\} \times \{1,-1\}$ mit einem p-Maß μ sodass für alle $(a,b) \in S^2 \times S^2$

$$\mu^{(a,b)}\left(\{(i,j)\}\right) := \mu\left(\{\omega \in \Omega \,|\omega(a,b) = (i,j)\}\right) = \frac{1 - ija \cdot b}{4} \text{ für } i, j \in \{1, -1\}.$$

Nun ist es plausibel, von den Abbildungen ω zu verlangen, dass für alle $a, b \in S^2$

$$\omega(a,b) = \left(\omega^1(a), \omega^2(b)\right).$$

Das Ergebnis der Messung am Atom 1 wird vom weit entfernten Apparat, der Atom 2 vermisst, nicht gestört (und vice versa). Die Bedingung heißt „Lokalitätsbedingung“.

Satz 2 (Bell) *Sei* Ω *eine Menge von Abbildungen* $\omega : S^2 \times S^2 \to \{1,-1\} \times \{1,-1\}$ *mit* $\omega(a,b) = \left(\omega^1(a), \omega^2(b)\right)$ *für alle* $a, b \in S^2$. *Sei* μ *ein p-Maß von* Ω. *Dann existieren Paare* (a,b) *mit* $\mu^{(a,b)} \neq q_v^{(A_1,B_2)}$.

Die Familie von p-Maßen $\left\{q_v^{(A_1,B_2)} \middle| (a,b) \in S^2 \times S^2\right\}$ hat keine lokale Kolmogorov-Simulation. Da die an Atom 1 messbare zweite Randverteilung von $q_v^{(A_1,B_2)}$ mit $q_v^{A_1}$ übereinstimmt, ist in der Umgebung von 1 zum Zeitpunkt der Messung die Wahl von b nicht feststellbar (und vice versa). Die Nichtlokalität bleibt empirisch irrelevant und es gibt keine instantanen Telefonate mittels Ausbreitung von Messstörungen.

Da $q_v^{(A_1,A_2)} = \frac{1}{2}\left(\delta_{(1,-1)} + \delta_{(-1,1)}\right)$, steht nach Ausführung der Messung A_1 das Ergebnis einer Messung A_2 fest. Bells Satz sagt, dass dies von einer Kolmogorov-Simulation eine gespenstische Fernwirkung verlangt. Nämlich eine Funktion $\omega^2 : S^2 \times S^2 \to \{1,-1\}$, die im ersten Argument nicht konstant ist. In den Teleportationsexperimenten wird die Richtung a von A_1 vom Zustand eines dritten Quantensystem, das sich bei Atom 1 befindet, determiniert. Je nach eintretendem Messwert i steht dann nach der Messung A_1 fest, dass Atom 2 in einem solchen Zustand ist, dass eine Messung von A_2 den Wert $-i$ ergibt. Aufgrund der Bellschen Nichtlokalität wird dann gesagt, dass der Zustand des dritten Quantensystems instantan auf Atom 2 übertragen wird. Das wird auch als Beamen oder als Zustandsteleportation bezeichnet. Um ein Ensemble von Atomen 2 zu erzeugen, das sich mit dem Ensemble des Systems 3 deckt, muss das Ergebnis der Messung A_1 zum Atom 2 hin mit einem klassischen Telefonat übertragen werden. Damit ist also eine verzögerungslose quasitelepathische Zustandspräparation in fernen Welten *nicht* möglich. Außerdem müsste die ferne Welt mit unserer in einen Zustand vom Typ v gebracht werden. Man nennt dies die Zustände verschränken. Und das geht nach heutigem Wissen nur innerhalb einer Zeitspanne, deren Dauer jene der Reisezeit von Licht übersteigt.