

Seltsame Quantenwelt*

Gebhard Gröbl
Institut für Theoretische Physik
Universität Innsbruck

October 20, 2011

1 Was sind Quanten?

Die Quotienten der Massen jener Stoffmengen, die sich miteinander vollständig verbinden können¹, legen nahe, dass die uns alltäglich umgebende, massetragende Materie aus winzigen Portionen der Sorten Wasserstoff, Helium, Lithium ... besteht. Diese von der Chemie ab ca 1800 vertretene Atomhypothese wurde von der Physik erst ab ca 1870 aufgegriffen und langsam ernst genommen. Auslöser war, dass Maxwell, Boltzmann und Gibbs die Gesetze der Wärmelehre aus der Atomhypothese heraus plausibel machen konnten. Dabei nahmen sie zunächst natürlich an, dass die Atome Newtons Gesetzen der klassischen Mechanik folgen würden.

Als klar wurde, dass auch für elektromagnetische Strahlung eine Art von Wärmelehre existiert, zeigte sich, dass eine solche Maxwells klassischem Bild einer portionslosen Kontinuumsfotomaterie widerspricht. Planck konnte um 1900 aus der Annahme einer Portionierung der elektromagnetischen Strahlungsenergie die bekannten Gesetze der elektromagnetischen Strahlung im thermischen Gleichgewicht erklären. Damit war klar, dass Maxwells elektrodynamische Gleichungen gewisse Bereiche der Natur falsch wiedergeben. Eine Krise der Maxwellgleichungen bahnte sich an.

Experimente im Bereich der Tieftemperaturphysik zeigten zwischen 1900 und 1920, dass sich massive Materie bei Temperaturen von wenigen Grad Kelvin anders verhält, als sie dies mit klassisch mechanisch arbeitenden Atomen müsste. Die Krise der Maxwellgleichungen weitete sich zu einer Krise der klassischen Mechanik aus.

Überdies wurde klar, dass Atome nicht unteilbar sind. Elektronen und Atomkerne betraten als elektrisch geladene Atombausteine die Bühne. Jeder Versuch, ein Atom als klassisch mechanischen Bindungszustand von positiv und negativ geladenen Teilchen zu verstehen, scheiterte an der Tatsache, dass

*Vortrag im Rahmen der Reihe 'Physik als Grundlage von Zukunftstechnologien' an der VHS Innsbruck am 20. Oktober 2011

¹Für sie gilt ja Daltons Gesetz der 'multiplen Proportionen'.

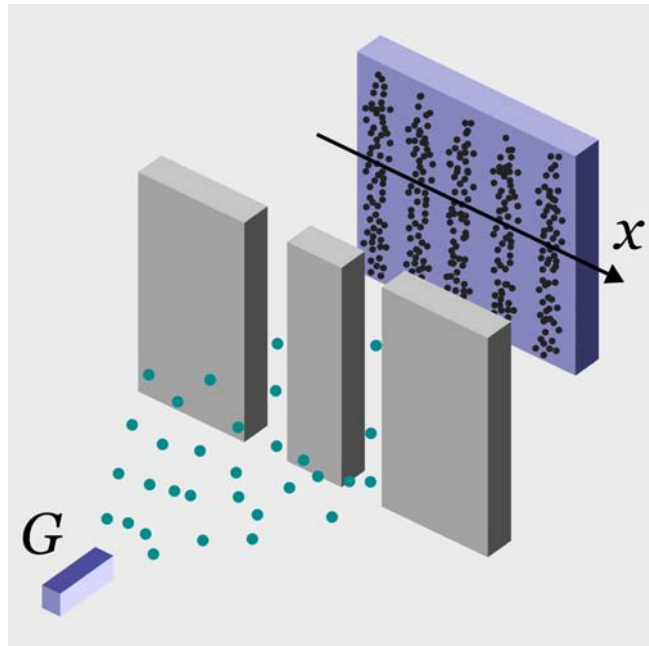
derartige klassische Bindungszustände strahlen anstatt zur Ruhe zu kommen. Der Eindruck, dass die damals bekannten Atombausteine, nämlich Elektronen und diverse Atomkerne, einer neuen Art von Mechanik folgen, festigte sich, als schließlich Beugungsexperimente mit Elektronen gemacht wurden. Diese offenbaren wellenartige Züge im Verhalten von Elektronen.

Nach Vorarbeiten von Bohr und de Broglie fanden Schrödinger, Heisenberg, Born und Jordan um 1925 eine solche neue Mechanik. Die 'Quantenmechanik' war geschaffen. Teilchen, die diesen neuen Gesetzen folgen, werden als 'Quanten' bezeichnet. Die QM enthielt als neue charakteristische Naturkonstante das von Planck in seinem Hohlraumstrahlungsgesetz eingeführte Wirkungsquantum \hbar . Natürlich dauerte es ein paar Jahre bis die ersten wesentlichen Konsequenzen der QM klar herausgearbeitet waren. Und viele aufgeweckte Köpfe beteiligten sich an diesem Prozess. Eine unstrittige Korrespondenz zwischen den mathematischen Konzepten der neuen Theorie und den Begriffen der Beobachtungsberichte existiert jedoch bis heute nicht.

Der Grund dafür liegt darin, dass Quanten nur wahrgenommen werden können, wenn sie in einem hinreichend großen System aus vielen Quanten hinreichend große Wirkungen hervorgerufen haben. Jeder Beobachtungsbericht über einzelne Quanten ist somit zwangsläufig ein Beobachtungsbericht über ein Vielteilchensystem. Dieser ist aber in Begriffen gehalten, die aus unserer Begegnung mit makroskopischen Objekten gewachsen sind. Solche Alltagsbegriffe scheinen jedoch nicht hinreichend gut zu den mathematischen Begriffen der QT zu passen.

Noch eine Bemerkung über weitere 'Quanten', die seit 1925 die Bühne betreten haben. Zuerst Kernphysik und später Elementarteilchenphysik brachten einen zunächst unüberschaubaren Teilchenzoo hervor: Neutron, Positron, Neutrino, Myon, Pion, Antiproton ... Übersicht brachte erst das zwischen 1970 und 1975 entstandene Standardmodell der Elementarteilchen, das eine auf einer tiefer liegenden Kontinuumsstruktur errichtete QT, eine sogenannte Quantenfeldtheorie ist. (Vortrag Knehringer) Umgekehrt zeichnet sich aber auch ab, dass aus Atomen zusammengesetzte massivere Gebilde bei genügend genauer Betrachtung den Gesetzen der QT folgen, also auch 'Quanten' sind. Daraus wuchs der Verdacht, dass die QT universell gültig ist. Damit erhebt sich das Problem: Wie und in welchen Situationen lässt sich die klassische Physik als Approximation der QT mathematisch schlüssig ableiten? Denn die zunächst von Bohr angestrebte Führung zweier gleichberechtigter Parallelwelten, einer makroskopisch-klassischen und einer mikroskopisch-quantenartigen, die verschiedenen Spielregeln folgen, scheint nicht systematisch haltbar zu sein.

2 Das Doppelspaltexperiment



<http://de.wikipedia.org/wiki/Doppelspaltexperiment>

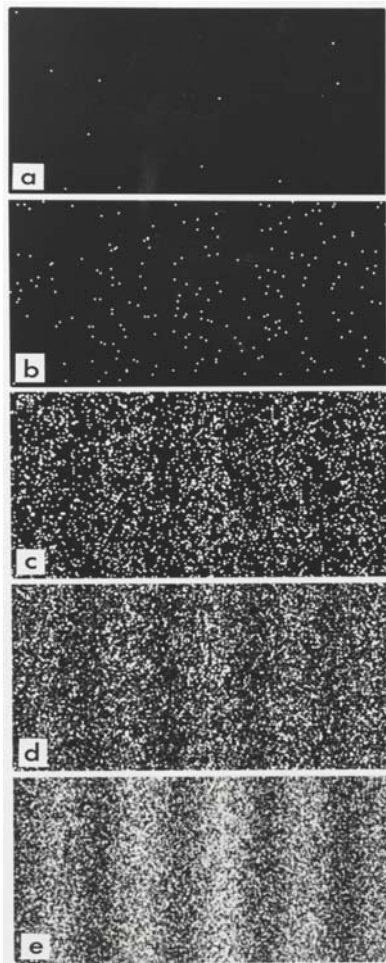
... macht die Nicht-Newtonische Dynamik, also eine 'Seltsamkeit' der Quanten deutlich. Es wurde mit Elektronen, Atomen und sogar schon ziemlich großen Molekülen des Typs C_{60} realisiert.

Eine Elektronenquelle sendet Elektronen gegen eine Wand, in die zwei - bei Bedarf durch Rollos verschließbare - Schlitze eingelassen sind. Hinter der Wand befindet sich ein Auffangschirm, der Elektroneneinschläge sichtbar macht. Das sehr schematische Bild legt es nahe, über das Doppelspaltexperiment in den Begriffen der klassischen Mechanik zu denken. Dabei gelangt man jedoch - wie wir gleich sehen werden - in Erklärungsnotstand. Das Bild, das sich die QT von diesem Experiment macht, ist ein erheblich anderes. Die QT bringt ein völlig neues Konzept ins Spiel, nämlich die Wellenfunktion, die im obigen Bild nicht zu sehen ist. Wie sieht also das QT'ische Bild des Doppelspaltexperiments aus und inwiefern hat die klassische Physik ein Problem mit diesem Experiment?

Das empirische Rohmaterial:

Die zeitliche Abfolge von 'screen shots' zeigt ein sich sukzessive aufbauendes deterministisches Muster von Einschlagspunkten auf dem Leuchtschirm. Die Einzelpunkte in shot a) scheinen zufällig verteilt und nicht vorhersehbar - analog zum Galtonbrett; in e) hingegen ist ein regelmäßiges Hell-Dunkel Muster deutlich ausgeprägt.

Achtung: Wechselwirkungen der Elektronen mit Gasteilchen müssen vermieden werden. Daher ist die Anordnung in einem Vakuum mit ca. 10^{-9} bar unterzubringen.

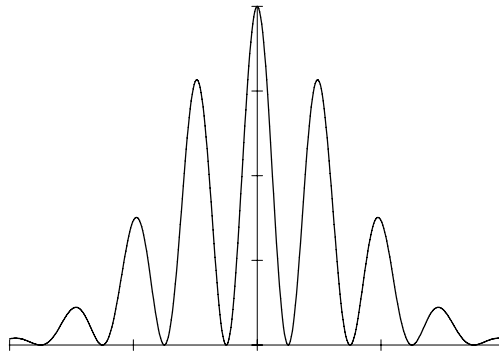


Elektronenbeugung an einem Einzelspalt

Die Auftreffwahrscheinlichkeitsdichte ρ eines Elektrons am Schirm hinter einem einzelnen Spalt, ist abhängig vom Abstand von 'ground zero'. Sie zeigt eine Ähnlichkeit mit der Beugung von Licht!

Ein typisches Beispiel für eine solche Dichte ist die Funktion

$$\rho(x) = c \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} \cos^2(\pi x).$$



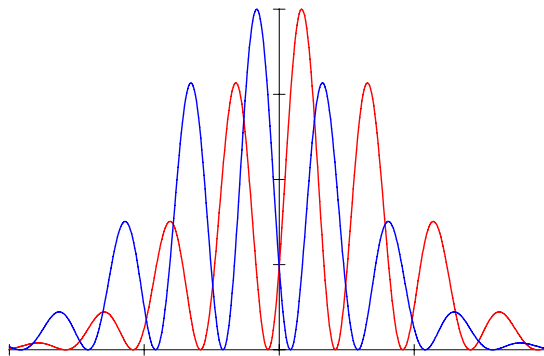
Ein Einschlag außerhalb der geometrischen Projektion des Spalts auf den Schirm ist also recht wahrscheinlich. Und zwar viel wahrscheinlicher, als es die (kurzreichweitige!) Wechselwirkung eines Newtonschen Massenpunktes mit der Spaltbegrenzung verlangt. Nur ein winziger Bruchteil von Newtonschen Teilchen würde aus ihrer geraden Bahn durch Streuung an der Spaltbegrenzung merklich abgelenkt werden. Dies ist die erste Überraschung des Durchgangs von Elektronen durch Löcher und Spalten in Wänden.

Ein etwas (1/3-Einheit) nach rechts versetzter Spalt ergibt die Auftreffdichte
(rote Kurve):

$$\rho_r(x) = c \cdot e^{-\frac{(x-\frac{1}{3})^2}{4}} \cos^2\left(\pi\left(x - \frac{1}{3}\right)\right)$$

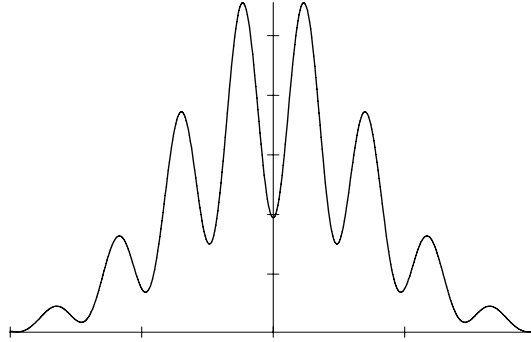
Ein etwas (1/3-Einheit) nach links versetzter Spalt ergibt die Auftreffdichte
(blaue Kurve):

$$\rho_l(x) = c \cdot e^{-\frac{(x+\frac{1}{3})^2}{4}} \cos^2\left(\pi\left(x + \frac{1}{3}\right)\right)$$



Die Auftreffdichte eines Elektrons bei (gleichverteilt) zufälligem Offenhalten
nur eines Spalts:

$$\frac{c}{2} \left(e^{-\frac{(x-\frac{1}{3})^2}{4}} \cos^2 \left(\pi \left(x - \frac{1}{3} \right) \right) + e^{-\frac{(x+\frac{1}{3})^2}{4}} \cos^2 \left(\pi \left(x + \frac{1}{3} \right) \right) \right)$$

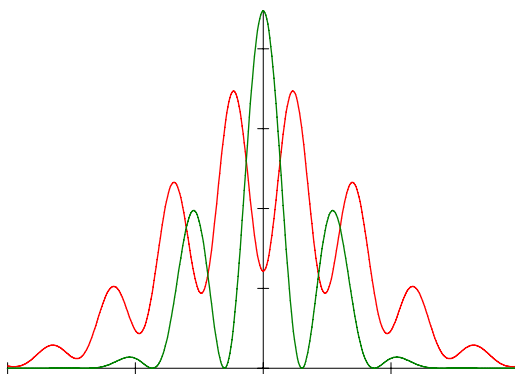


Die große Überraschung

Die Auftreffdichte eines Elektrons bei *gleichzeitigem* Offenhalten beider Spalte zeigt die grüne Kurve

$$\frac{c'}{2} \left(e^{-\frac{(x-\frac{1}{3})^2}{2}} \cos \left(\pi \left(x - \frac{1}{3} \right) \right) + e^{-\frac{(x+\frac{1}{3})^2}{2}} \cos \left(\pi \left(x + \frac{1}{3} \right) \right) \right)^2$$

Den Vergleich zur entweder-oder-Situation (rot) zeigt das folgende Bild.



Verwunderlich ist im Bild eines klassischen Teilchens: das Elektron wird *erheblich* davon beeinflusst, ob der zweite Spalt, durch den es gar nicht geht und dem es auch nicht nahekommt, offen oder geschlossen ist. Dafür hat die Newtonsche Mechanik keine ('ungekünstelte') Erklärung!² Die Auftreffdichte hinter dem Doppelspalt zeigt vielmehr Züge zweier interferierender Teilwellen, die durch jeweils einen der Spalte dringen.

Die Interferenzerscheinung zwischen den beiden Teilwellen ist jedoch umso schwächer ausgeprägt, je stärker das Elektron die Atome des Beugungsschirms (beim Durchtritt durch den Doppelspalt) beeinflusst. Dann gleicht sich die grüne Kurve immer mehr der roten an. Ein Unterschied fehlt gänzlich, wenn der Schirm einen bestimmten Durchtrittsspalt des Elektrons dokumentiert. Es ist gerade die Schwierigkeit eines Doppelspaltexperiments die Störungen soweit zurückzudrängen, dass sich die grüne von der roten Kurve unterscheiden lässt.

²Natürlich hat die Anwesenheit eines Rollos, das den unbenützten Spalt verschließt, auch eine Newtonsche Auswirkung. Diese ist aber winzig und nicht dazu geeignet, das drastische Abweichen der roten von der grünen Kurve zu erklären.

3 Schrödingers Wellenfunktion

Ein Elektronenzustand 'ist' eine 'Wellenfunktion' ψ , die jedem Ort x einen³ Pfeil oder sogenannten Vektor $\psi(x)$ in der reellen, 2d Ebene zuweist. (Vektorfeld) Das Längenquadrat $|\psi(x)|^2$ des Vektors $\psi(x)$ ist (bis auf einen konstanten Faktor) die Wahrscheinlichkeitsdichte das Elektron am Ort x zu detektieren. Da die Rede umständlich ist, sagt man auch, $|\psi(x)|^2$ sei die W-Dichte dafür, dass das Elektron am Ort x *ist*. Ist die Funktion ψ aus zwei anderen Vektorfeldern additiv zusammengesetzt, dann setzt sich seine Orts-w-dichte in der Regel *nicht* additiv aus den Teildichten zusammen, denn⁴

$$\begin{aligned} |\psi(x)|^2 &= |\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2 \\ &= |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + 2|\psi_1(x)||\psi_2(x)|\cos\Theta[\psi_1(x), \psi_2(x)] \end{aligned}$$

Der Zusatzterm $2\cos\dots$ sorgt für 'Interferenz' beim Doppelspalt. Er kann positiv oder auch negativ sein. So kann es vorkommen, dass die beiden Teilwellen ψ_1 und ψ_2 sich in einem Punkt x auslöschen, d.h. durch Spalt 1 kann das Teilchen den Ort x bei geschlossenem Spalt 2 erreichen et vice versa; sind beide Spalte jedoch offen, dann ist das Teilchen am Ort x sicherlich nicht nachzuweisen!

Moral: Ein Elektron mit der Wellenfunktion $\psi_1 + \psi_2$ breitet sich durch *beide* Spalte aus.

³Bei Berücksichtigung des Spins sind es im Fall des Elektrons eigentlich zwei Vektoren in jedem Punkt des Raumes.

⁴ $\Theta[\psi_1(x), \psi_2(x)]$ ist der Winkel zwischen den beiden Pfeilen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$.

4 Schrödingers Bewegungsgleichung

Schrödinger formulierte eine Gleichung, die festlegt wie sich Wellenfunktionen ψ im Laufe der Zeit ändern. Sie enthält in jeder ihrer Ausformungen ein und dieselbe Plancksche Naturkonstante

$$\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \approx 10^{-34} \text{ J s}$$

sowie die Massen und Ladungen der involvierten Teilchen. Sie lautet im einfachsten Fall eines 1d Teilchens der Masse m

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_t(x) = \frac{\hbar}{2m} \cdot i \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_t(x).$$

Dabei bedeutet i eine Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn.

Schrödingers Gleichung 'erklärt' den von de Broglie vermuteten Zusammenhang zwischen der (mittleren) Geschwindigkeit v eines Teilchens der Masse m und der dominierenden Wellenlänge λ seiner Wellenfunktion. Er lautet

$$mv = \hbar \cdot \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Das Elektronenmikroskop macht davon Gebrauch. Die Beziehung scheint jedoch für alle Quanten gültig zu sein.

Durch Schrödingers Gleichung ist die Wellenfunktion ψ_t eines Quantensystems zu jeder beliebigen Zeit t durch die Wellenfunktion ψ_{t_0} desselben Systems zu einer einzigen Zeit t_0 eindeutig festgelegt. Besonders wichtig sind jene Lösungen der SG, die sich als Vektorfelder im Lauf der Zeit überall im ganzen Raum mit derselben gleichbleibenden Winkelgeschwindigkeit drehen. Diese Winkelgeschwindigkeiten haben vielfach nur ganz bestimmte diskrete ('quantisierte') Werte. Diese sogenannten Eigenfrequenzen sind für ein System charakteristisch und legen zB die Farbe eines Stoffes fest. Sie sind der 'Fingerabdruck' eines Stoffes. In der detaillierten, quantitativen Erklärung vieler sogenannter Resonanzspektren liegt eine der großen Leistungen der QM.

Hervorzuheben ist die Tatsache, dass erst Schrödingers Gleichung das Problem der klassischen Physik beseitigte, dass Systeme von ausdehnungslosen, elektrisch geladenen Teilchen keinen beruhigten Gleichgewichtszustand, einen sogenannten Grundzustand besitzen. Die klassische Physik konnte die Existenz von Tischen, Stühlen etc. nicht aus ihren Fundamentalgesetzen heraus erklären, denn positive und negative Ladungen müssten sich anziehen und die Welt in ein flammendes Inferno verwandeln. Damit machte Schrödingers Gleichung zusammen mit Paulis Antisymmetrisierungsregel Schluss. Ohne Pauliprinzip oder mit spinlosen Elektronen hätte auch die QT ein Problem mit Tischen und Stühlen.

5 Feldquantisierung

Schrödingers Schema einer QM lässt sich mit der Relativitätstheorie nicht in Einklang bringen. Daher der Versuch, Maxwells Gleichungen des elektromagnetischen Feldes anstelle von Newtons Gleichungen zum Ausgangspunkt einer QM zu machen. Dieser Versuch vervollständigte zunächst Plancks Überlegungen zur Begründung der Wärmelehre der elektromagnetischen Strahlung. Nach diesem Erfolg wurde das Feldquantisierungsprogramm mit Vehemenz weiter verfolgt. Vorläufiger Höhepunkt ist das Standardmodell der Elementarteilchenphysik mit seinen Leptonfamilien, Quarks, Gluonen, W's, Z's, Photonen und vielleicht Higgsbosonen. Dieses Modell kann als ein 'Periodensystem der Elemente' im subatomaren Bereich gesehen werden.

Neu an dieser Art von Quantenfeldtheorie ist, dass Art und Zahl der Teilchen eines Zustands sich im Lauf der Zeit verändern können. Die Wellenfunktion im Sinne Schrödingers verliert daher ihre Bedeutung. Dafür werden manche Größen, wie das magnetische Moment eines Protons, zu grundsätzlich berechenbaren.

Mathematische Inkonsistenzen bzw. eine Unverträglichkeit mit der allgemeinen Relativitätstheorie haben Versuche provoziert, den Rahmen der quantisierten Feldtheorien nochmals weiter zu fassen. So entstanden Stringtheorie, topologische QFT, etc. etc. Alle derartigen Theorien werden heute unter dem Dach 'QT' geführt.

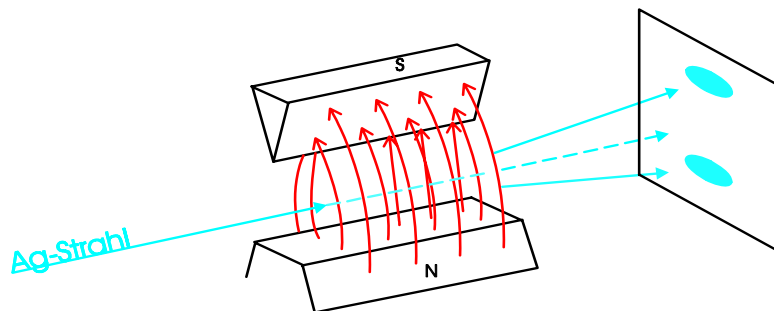
6 Anwendungsbereiche der QT

Begriffe der Quantentheorie leiten heute das Denken über Elementarteilchenphysik bis in den Bereich thermischer Eigenschaften von makroskopischen Vielteilchensystemen. Von hochenergetischen Streuprozessen einzelner elementarer Teilchen über die Bindungsenergie von Atomkernen, ein Verständnis des Periodensystems der chemischen Elemente, die Leitungseigenschaften von Halbleitern bis zur Stabilität von Sternen reicht die Palette der Anwendungen. Dass elektromagnetische Strahlung einen Zustand des thermischen Gleichgewichtes besitzt, wurde ebenfalls erst durch die QT erklärt.

Technologischer Niederschlag von Quantenphänomenen:

- Kernkraftwerke (Energieversorgung, Radioisotopenerzeugung, Waffentechnik)
- Teilchenbeschleuniger & Speicherringe (Forschung, Tumorbehandlung)
- Laser (DVD-Player, Steuerung, Spektroskopie)
- Kernspinresonanz (Medizindiagnostik)
- Giant-Magnetoresistance (Festplattenlesekopf)
- CCD (Digitalfotografie)
- Supraleitung (Erzeugung höchster Magnetfelder)

Ein sehr allgemeiner Zug der Natur, die Klassifizierbarkeit von Zuständen in klar voneinander getrennte Familien ohne dazwischen liegende Übergangsfälle fand letztlich auch erst durch die QT eine vorläufige Erklärung. Die QT diskretisiert viele klassisch als kontinuierlich abgestufte Phänomene. Davon hat sie auch ihren Namen, der sich ja von einer grundlegenden Portionierung der Strahlungsenergie in einem Hohlraum ableitet. Das Stern-Gerlach-Experiment gibt ein Paradebeispiel, die sogenannte 'Raumquantisierung':



Aufspaltung eines Atomstrahls durch ein Magnetfeld

Und trotz aller Einsichten, die wir der QT verdanken, bleiben unzählige Fragen offen. Sogar solche grundsätzlicher Natur, nämlich solche, die ähnlich dramatisch sind wie jene, die die klassische Physik zu Fall gebracht haben. Um diese Fragen begreifen zu können, müssen wir uns etwas genauer mit dem begrifflichen Gerüst der QT auseinandersetzen.

7 Bohrs Indeterminismus und Welle-Teilchen-Dualismus

Die Wellenfunktion eines Elektrons zeichnet im allgemeinen Fall keinen Punkt im Raum aus. Sie ist ja ein den ganzen Raum erfüllendes Feld! An ihr ist also kein Elektronenort abzulesen. Solch ein Ort wird nur über die Wechselwirkung der Wellenfunktion mit gewissen makroskopischen Materieansammlungen ('Detektoren') durch die Reaktion eines der Detektoren ausgezeichnet, denn es gilt:

1. Ein einzelnes Elektron kann zu einer bestimmten Zeit in zwei voneinander weit entfernt liegenden Detektoren nur in jeweils höchstens einem der beiden eine makroskopische Wirkung (ein sogen. 'Detektionsereignis') auslösen. Das suggeriert natürlich das Bild eines ausdehnungslosen 'Teilchens' und die naheliegende Vorstellung: 'der Detektor, in dem das Teilchen *ist*, löst aus'.
2. Ob ein Elektron in einem bestimmten Detektor ein Detektionsereignis auslöst oder nicht, das legt die QT meist nicht fest. Sie gibt dafür lediglich die Wahrscheinlichkeit an. 'Indeterminismus' der Makro-Wirkung.
3. Das Elektron kann aber von den (mikroskopischen oder auch makroskopischen) Umständen an zwei voneinander weit entfernten Orten gleichzeitig beeinflusst werden! Das Elektron ist also *auch* wie eine Welle über ein größeres Raumgebiet verteilt.

8 Heisenbergs Unschärferelation

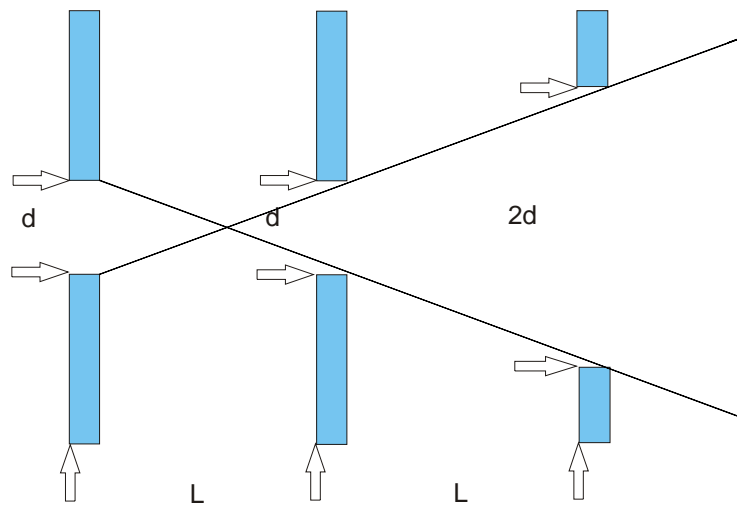
Werden zwei parallele Schirme im Abstand L mit hintereinanderliegenden zentrierten und parallelen Spalten der Breite d von einem kräftefreien klassischen Punktteilchen durchlaufen, dann ist zum Zeitpunkt des Durchtritts des Teilchens durch den zweiten Schirm seine Koordinate innerhalb der Schirmebene und senkrecht zum Spalt mit einer Genauigkeit d festgelegt. Die zugehörige Geschwindigkeitskomponente v_{trans} ist, bei einer Laufzeit T vom ersten bis zum zweiten Spalt, wegen $1 = Tv_{long}/L$ durch

$$T |v_{trans}| < d = d \frac{Tv_{long}}{L}$$

eingegrenzt. Kürzen durch T ergibt

$$|v_{trans}| < v_{long} \frac{d}{L}.$$

Kontrolle: Ein dritter paralleler Schirm im Abstand $2 \cdot L$ mit einem (ebenfalls zentrierten) Spalt der Dicke $2 \cdot d$ wird von einem klassischen Punktteilchen dann jedenfalls auch durchdrungen.⁵ Nicht so jedoch von einem Elektron! Die Beugung der Wellenfunktion am zweiten Spalt verhindert dies und zwar umso wirkungsvoller je kleiner d gewählt wird. Der Versuch, bei einem Mikroteilchen Transversalkoordinate und Transversalgeschwindigkeit gemeinsam allzusehr einzugrenzen, schlägt aufgrund seiner Beugungsfähigkeit fehl.



⁵Die Möglichkeit einer Ablenkung eines Teilchens am Spaltrand lassen wir wieder wegen ihrer Seltenheit unter den Tisch fallen.

Eine quantitative Analyse dieses Beugungsphänomens folgt aus der Schrödingergleichung. Sie regelt die zeitliche Änderung von ψ_t und damit auch die Änderung der 'Unschärfe' $\Delta_t X$ der Ortsverteilung $\rho_t = |\psi_t|^2$. Daraus lässt sich eine (Pseudo-) Geschwindigkeitsverteilung und deren Unschärfe $\Delta_t V$ ermitteln. Es zeigt sich, dass für alle zulässigen Wellenfunktionen ψ_{t_0} und für alle Zeiten t gilt

$$\Delta_t X \cdot \Delta_t V \geq \frac{\hbar}{2m}.$$

D.h. kartesische 'Orts-' und 'Geschwindigkeitskomponenten' eines Teilchens (umgeben von Detektoren!) können niemals gleichzeitig beliebig eng verteilt sein. Es gibt keine Filter, die Ort *und* Geschwindigkeit über die von der Unschärfereaktion gegebene Grenze hinaus scharf einregeln. Denn: Ein Makroenvironment, das einen Elektronen'ort' umreisst, ist ganz verschieden von einem Environment, das eine 'Elektronengeschwindigkeit' definiert. Diese Environments schließen einander aus und daher lässt sich auch über Beobachtungen von Makroenvironments kein Paar aus Elektronenort *und* -geschwindigkeit ein und desselben Teilchens definieren. Dies wird mit der Rede 'Komplementarität von Ort und Geschwindigkeit' bedacht.

Bohr, Heisenberg und viele andere waren daher davon überzeugt, dass Ort und Geschwindigkeit eines Elektrons in Form von Zahlenwerten im begrifflichen Rahmen der QT gar nicht existieren. Elektronenort und -geschwindigkeit sind nur als endliche Intervalle, für ein Elektron erklärt, das sich in einem ganz bestimmten makroskopischen Umfeld befindet. Orts- und Geschwindigkeitsintervalle werden nur aus den makroskopischen Reaktionen definiert. Bohr ging sogar so weit zu verkünden: 'Only an observed phenomenon is a phenomenon.' Diese Bezugnahme auf 'Beobachtung' bringt eine gedankliche Vermengung von Mikro- und Makrosystemen, die heute mit zunehmender Skepsis betrachtet wird. Bell wurde diesbezüglich sarkastisch. Er fragte, was ein Makrosystem zum 'Beobachter' qualifiziere und ob es vor dem Auftreten höher organisierter Organismen im Universum keine klar abgesteckten Sachverhalte gab.

9 Verschränkung und Nichtlokalität

Welche Wellenfunktionen Ψ beschreiben ein System, das aus einem Elektron und einem Proton besteht? Es stellte sich heraus, dass zulässige Ψ je *zwei* Orten (x, y) im Raum *einen* Pfeil in der euklidischen Ebene zugewiesen. Das Längenquadrat des Pfeils gibt dann die Detektions-w-dichte des Elektrons in x und des Protons in y an.

Im Allgemeinen sind an Ψ keine 'Privatwellenfunktionen' für entweder das Elektron oder das Proton auszumachen. Die 2-Teilchenwellenfunktion $(x, y) \mapsto \Psi(x, y)$ ist dann keinem Paar von Einteilchenwellenfunktionen

$$(x, y) \mapsto (\psi_e(x), \psi_p(y))$$

äquivalent. Hier ein simples 1d-Beispiel:

$$\Psi(x, y) = \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Warum sind nichtfaktorierende Wellenfunktionen seltsam? In den physikalischen Theorien bis 1925 wurde ein zusammengesetztes System durch das Aggregat der vollständigen Bestimmungsstücke aller seiner Teile vollkommen festgelegt. Dieses Konstruktionschema durchbricht die heutige Quantentheorie. Ein zusammengesetztes System kann Züge aufweisen, die sich aus dem Verhalten seiner Einzelteile nicht erschließen lassen. Schrödinger hielt dies für *den* herausragenden Wesenszug der Quantenphysik und manche schwärmen: Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.

Nichtfaktorierende Wellenfunktionen sind noch in einer anderen Hinsicht seltsam. Seien

$$x \mapsto \varphi_Z(x) \text{ und } x \mapsto \varphi_H(x),$$

1-Teilchenwellenfunktionen, die im Fall von φ_Z das Elektron in Zirl und im Fall von φ_H das Elektron in Hall lokalisieren. Analog lokalisieren die Wellenfunktionen

$$y \mapsto \Phi_R(y) \text{ und } y \mapsto \Phi_B(y)$$

ein Proton in Rom bzw Berlin. Nun gibt es eine mathematisch sinnvolle Multiplikationsregel⁶ für Pfeile in der Ebene, sodass eine Gesamtwellenfunktion für Elektron und Proton gemäß

$$(x, y) \mapsto \Psi_{e,p}(x, y) = \varphi_Z(x) \cdot \Phi_R(y) + \varphi_H(x) \cdot \Phi_B(y)$$

gebildet werden kann. Sie beschreibt die Situation eines riesigen Vierfachspalt-experiments mit zwei Teilchen gleichzeitig.

$\Psi_{e,p}$ stimmt mit keiner der möglichen Produktwellenfunktionen

$$(x, y) \mapsto f(x) \cdot g(y)$$

⁶Es ist dies die Multiplikation, welche die 2d Ebene reeller Vektoren zur komplexen Zahlenebene macht.

überein. Dies verhindert, dass das Elektron und das Proton des Zustands mit der Wellenfunktion $\Psi_{e,p}$ jeweils eine eigene Wellenfunktion f bzw g haben. Dies ist so, als würden zwei zunächst isolierte Sterne aufgrund ihrer Schwerkraftwechselwirkung ihre Orte und Geschwindigkeiten nicht nur ändern, sondern jeglichen Ort und jegliche Geschwindigkeit verlieren. Schrödinger bedachte diese Merkwürdigkeit von zusammengesetzten Quantensystemen mit dem Namen 'Verschränkung'. Eine Wellenfunktion wie $\Psi_{e,p}$ wird dementsprechend als 'verschränkt' bezeichnet.

Die Lektion des Doppelspaltexperiments scheint nun zu sein, dass das Proton des 2-Teilchensystems mit der Wellenfunktion $\Psi_{e,p}$ sowohl in Rom als auch in Berlin *ist*. Wird jedoch die Wellenfunktion $\Psi_{e,p}$ in Zirl mit einem makroskopischen Detektor zur Wechselwirkung gebracht, und das Elektron dort detektiert, dann wird damit gleichzeitig auch die Lokalisierung des Protons *in Rom und Berlin* zu einer Lokalisierung *in Rom* eingeschränkt. Bei gleichzeitiger Protonendetektion in Berlin wird mit Sicherheit das Proton in Berlin nicht angetroffen. Zieht sich also das Proton aus Berlin oder gar aus beliebig fernen Teilen der Welt auf ein Kommando aus Zirl instantan zurück? Die Antwort darüber, was sich da zurückzieht, ist umstritten.

Die Wellenfunktion $\Psi_{e,p}$ ist zwar nicht dazu geeignet, zwischen Zirl und Rom mit Überlichtgeschwindigkeit Signale auszutauschen, also wechselseitig regelbare Wirkungen auszulösen. Sie kann aber dazu dienen, in Zirl und in Rom gleichzeitig(!) ein und dieselbe beliebig lange Zufallsfolge von Nullen und Einsen zu erzeugen. Und so eine Folge, deren Bildungsgesetz 'kein Sterblicher' kennt, ist hilfreich, wenn es um geheimen Datentransfer geht. (Vortrag, W Dür)

Bell konnte für gewisse verschränkte Wellenfunktionen von zwei Teilchen mit Spin zeigen, dass sich bestimmte, weit voneinander entfernte Detektionsprozesse mit Überlichtgeschwindigkeit gegenseitig beeinflussen müssen. Allerdings so, dass dieser Einfluss aus den beobachtbaren und steuerbaren Mittelwerten, die zur Signalübertragung geeignet sind, herausfällt. Dieser Sachverhalt wird als Bells Nichtlokalität bezeichnet.

10 Zweifel an Bohrs Deutung

Das Doppelspaltexperiment scheint zu sagen: Das Elektron *gibt sich* als ein Punktteilchen mit (ungefähr) Ort, wenn es in räumlich lokalisierten makroskopischen Materieteilen sichtbare Effekte auslöst. Andernfalls *gibt sich* das Elektron als raumerfüllende Welle. (WT-Dualismus)

Häufig gestellte Frage an diese Standardinterpretation: *Hat* ein einzelnes Elektron für sich alleine einen (ungefähr) Ort?

Eine der Standardantworten darauf ist: Das können wir nicht wissen, da ja ein isoliertes Elektron unserer Wahrnehmung unzugänglich ist. Was wir nicht wissen *können*, das gibt es auch nicht.

Eine bessere Standardantwort: Ein isoliertes Elektron hat niemals einen (genauen) Ort⁷, weil ein solcher im mathematischen Formalismus der Theorie nicht vorkommt. Nur die makroskopischen Detektoren haben Orte - gemäß Annahme. Sie weisen durch ihre zufällige Reaktion auf das Elektron diesem gegebenenfalls einen zufälligen Ort zu. Die QT braucht also eine Zweiteilung der Welt in einen quantenartigen Mikro- und einen klassischen Makrokosmos. Die Wechselwirkung zwischen den beiden Teilen der Welt ist Zufallsgesetzen unterworfen.

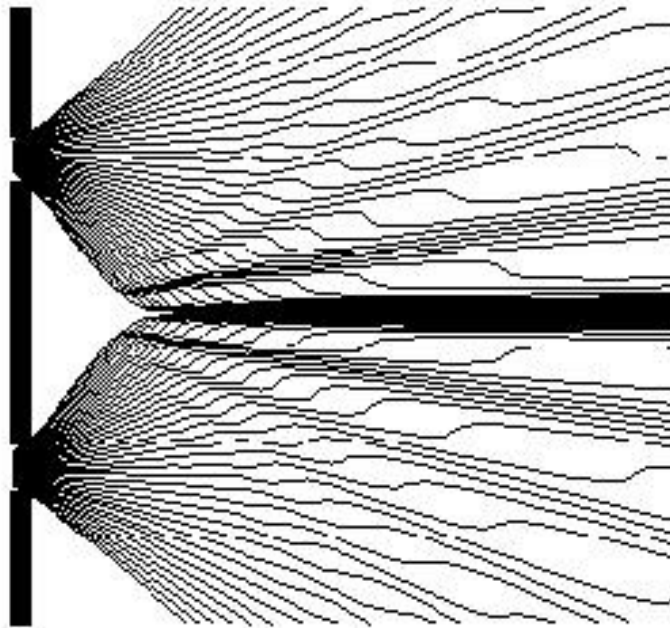
Einstein, Schrödinger, Bell u.a. wandten ein, dass eine solche (ungenau formulierte) Spaltung der Welt unplausibel ist, weil sie sich vermutlich *nicht* in präzise Regeln fassen lässt. Wenn aber alles nach Schrödingers deterministischer (!) Gleichung und ohne den realitätserzeugenden Zufall an der Schnittstelle zwischen Mikro- und Makrowelt geschieht, dann haben auch makroskopische Körper wie unser Mond keinen Ort, sofern die QT bis hinauf zu solch komplexen Dingen gültig ist. Einstein opponierte überdies gegen die Verwendung von Zufallsgesetzen auf fundamentalphysikalischer Ebene, da Zufallsaussagen über die Welt als ganzes in Ermangelung von Weltkopien wenig sinnvoll erscheinen. Seine Skepsis hinterließ er uns in der sarkastischen Warnung 'Gott würfeln nicht'.

Von Vielen wird heute das von Einstein und Bell klar erkannte Fehlen einer Brücke von der Physik einzelner Mikroteilchen hinauf zur Physik großer komplexer Systeme als ein Mangel der QT empfunden. Sie fragen: Wie kommt angesichts des Fehlens von Eigenschaften mikroskopischer Systeme die alltägliche makroskopische Bestimmtheit von Eigenschaften zustande? Schrödinger illustrierte dieses 'Makroobjektivierungsproblem' mit einer Katzenparabel. Diese Kritik hat nichts mit einer Ablehnung eines Indeterminismus zu tun, denn zufällig kann nur etwas sein, das es gibt. Ein Ort, den es nicht gibt, der kann weder zufällig noch nicht zufällig sein. Über den lässt sich nicht einmal (vernünftig) reden.

⁷Und einen ungefähren nur in Ausnahmsituationen.

Lösungsidee: Entweder existiert eine Gültigkeitsgrenze der SQT im Bereich großer Systeme (zB Reduktionsmodelle) oder eine logisch haltbare Ergänzung der heute akzeptierten Standard-QT etwa nach dem Muster der Bohmsche Mechanik wird entwickelt.

Dies führt uns zurück zur eingangs gestellten Frage nach einem quantentheoretischen Bild des Doppelspaltexperiments. Die Bohmsche Mechanik gibt uns ein klares Bild: Ein Elektron ist ein Punktteilchen, dessen Ort von seiner Wellenfunktion geführt wird. Es ist Welle und Teilchen zugleich! Welche der unendlich vielen möglichen Bahnen das Elektron realisiert, das ist nicht regelbar, sondern das ist durch $|\psi|^2$ zufallsverteilt. Hier ein Bild des Doppelspaltexperiments nach Bohm.



http://de.wikipedia.org/wiki/Bohmsche_Mechanik

Berechnete Filme der zeitlichen Entwicklung des Elektronenorts sind unter <http://bohm-mechanics.uibk.ac.at/> zu betrachten.