9. Übungen zu Quantentheorie II / 10. Dezember 2002/ GG

Diracgleichung: Positivenergielösungen, Lokalität

1. **Zur Spektraldarstellung des Diracoperators:** Die Fourierdarstellung[1] $\mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1}$ des Diracoperators $H = -i\gamma^0\gamma^k\partial_k + \kappa\gamma^0$ erfüllt

$$\mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1}\psi : \mathbf{k} \mapsto \left(\sum_{l=1}^{3}\gamma^0\gamma^l k^l + \kappa\gamma^0\right)\psi(\mathbf{k}) = h(\mathbf{k})\psi(\mathbf{k}).$$

Leiten Sie aus der Orthogonalprojektion $\Pi_+^{\mathbf{k}} = (2\varpi(\mathbf{k}))^{-1}(h(\mathbf{k}) + \varpi(\mathbf{k})) : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ auf den Eigenraum von $h(\mathbf{k}) : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ zum Eigenwert $\varpi(\mathbf{k}) = \sqrt{\kappa^2 + |\mathbf{k}|^2}$ ab, dass (bei einer Wahl der Diracmatrizen γ^μ wie bei Bjorken & Drell) für $\mathbf{k} \neq 0$ und mit der Bezeichnung $\Omega_\pm(\mathbf{k}) = \sqrt{\varpi(\mathbf{k}) \pm \kappa}$

$$\Pi_+^{\mathbf{k}}\left(\mathbb{C}^4\right) = \left\{u_\chi(\mathbf{k}) := \begin{pmatrix} \Omega_+(\mathbf{k})\,\chi \\ \Omega_-(\mathbf{k})\,\sigma(\mathbf{k}/|\mathbf{k}|)\chi \end{pmatrix} : \chi \in \mathbb{C}^2\right\}$$

und für $\mathbf{k} = 0$

$$\Pi_+^0\left(\mathbb{C}^4\right) = \left\{u_\chi(0) := \begin{pmatrix} \sqrt{2\kappa}\chi \\ 0 \end{pmatrix} : \chi \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

Rechnen Sie nach, dass $\langle u_\chi(\mathbf{k}), u_{\chi'}(\mathbf{k})\rangle_{\mathbb{C}^4} = 2\varpi(\mathbf{k})\langle \chi, \chi'\rangle_{\mathbb{C}^2}$ und zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^4, \mathbf{k} \mapsto u_\chi(\mathbf{k})$ auch bei 0 stetig ist.

2. **Paulis kausale Ausbreitungsfunktion Δ:** Ein minkowskisches inneres Produkt von $\mathbb{R}^4$ ist $\langle a, b\rangle = a^0b^0 - \sum_{i=1}^3 a^ib^i$. Die zugehörige (minkowskische) Fouriertransformation ist:

$$(\mathcal{F}f)(x) = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^4}\exp\left(-i\langle k, x\rangle\right)f(k)d^4k.$$

Sei für reelles $\kappa^2 > 0$ die Distribution $\widetilde{\Delta}$ auf $\mathbb{R}^4$ durch $\widetilde{\Delta}(k) = \frac{-i}{2\pi}sgn(k^0)\delta(\langle k, k\rangle - \kappa^2)$ definiert.

   (a) Zeigen Sie mit den Bezeichnungen $k_\kappa = (\varpi(\mathbf{k}), \mathbf{k})$ (formal), dass

$$\Delta(x) := \left(\mathcal{F}\widetilde{\Delta}\right)(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3k}{2\varpi(\mathbf{k})}\left[e^{-i\langle k_\kappa, x\rangle} - e^{i\langle k_\kappa, x\rangle}\right]$$

   und, dass $\left(\Box + \kappa^2\right)\Delta = 0$.[2]

   (b) Sei $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ Element der Invarianzgruppe L von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und es gelte bezüglich der Standardbasis $\underline{e}$, dass $M(A, \underline{e})_0^0 \geq 1$. Zeigen Sie $\widetilde{\Delta}(Ak) = \widetilde{\Delta}(k)$ und $\Delta(Ax) = \Delta(x)$. Die Distributionen Δ und $\widetilde{\Delta}$ sind invariant unter der "orthochronen" Lorentzgruppe.

   (c) Zeigen Sie, dass $\Delta(x^0, \mathbf{x}) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta(x^0, \mathbf{x}) = -\delta^3(\mathbf{x})$ für $x^0 = 0$.

   (d) Zeigen Sie, dass $\Delta(x) = 0$ für $\langle x, x\rangle < 0$.

3. **Diracs Evolutionskern:** Sei $S(x) := \left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \kappa\right)i\gamma^0\Delta(x)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi(x^0, \mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^3}d^3x' S(x^0, \mathbf{x} - \mathbf{x}')\psi_0(\mathbf{x}')$ Lösung der Diracgleichung zur Anfangsbedingung $\psi(0, \mathbf{x}) = \psi_0(\mathbf{x})$ ist.[3] Zeigen Sie: aus $\psi_0(\mathbf{x}) = 0$ für $|\mathbf{x}| > R$ folgt, dass $\psi(x^0, \mathbf{x}) = 0$ für $|\mathbf{x}| > R + \left|x^0\right|$. Das ist die "Lokalität" der Diracgleichung.

4. **Äquivarianz des Diracstroms:** Sei ψ eine $\mathcal{C}^1$-Lösung der Diracgleichung. Das zugehörige (divergenzfreie) Stromvektorfeld ist durch $j_\psi = \left(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right)\partial_\mu$ gegeben. Zeigen Sie für die lokale Darstellung von L aus Beispiel 3) von Blatt 8), dass $j_{\widehat{A}\psi} = A_* j_\psi$, wobei A_* die Tangentialabbildung von $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ist.[4]

---

[1] Für $f \in L^2\left(\mathbb{R}^3 : \mathbb{C}^4\right)$ sei $(\mathcal{F}f)(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3}\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})f(\mathbf{x})d^3x$.

[2] Es gilt mit der Besselfunktion wie bei Abramowitz & Stegun, Formel 9.1.10

$$\Delta(x) = -\frac{sgn(x^0)}{2\pi}\left[\delta(\langle x, x\rangle) - \kappa\frac{\Theta(\langle x, x\rangle)}{2\sqrt{\langle x, x\rangle}}J_1\left(\kappa\sqrt{\langle x, x\rangle}\right)\right].$$

[3] Die Funktion $S(x^0, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ ist somit der Integralkern des Evolutionsoperators $\exp\left(-ix^0H\right)$ zum Diracoperator $H = -i\sum_{k=1}^3\gamma^0\gamma^k\partial_\kappa + \kappa\gamma^0$.

[4] Oft wird das so kommentiert: "Der Strom transformiert als Vektorfeld".