8. Übungen zu Quantentheorie II / 3. Dezember 2002/ GG

Lorentzinvarianz der Diracgleichung[1]

1. **Lorentzgruppe L und ihre Liealgebra $\mathfrak{l}$:** Sei V ein reeller, 4d Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein inneres Produkt von V mit der Signatur $(+,-,-,-)$. Die Folge $\underline{e}=(e_0,..e_3)$ sei eine Normalbasis[2] von V. Sei $A: V\to V$ linear. Dann wird notiert $Ae_\mu = e_\nu M(A,\underline{e})^\nu_\mu$ (Summenkonvention). Die zu A adjungierte Abbildung A^* (bezüglich des minkowskischen inneren Produktes) ist durch $\langle v, Aw\rangle = \langle A^*v, w\rangle$ für alle $v,w\in V$ definiert. Es gilt somit $M(A^*,\underline{e})^\rho_\mu \eta_{\rho,\nu} = \eta_{\mu,\rho} M(A,\underline{e})^\rho_\nu$ oder äquivalent dazu $M(A^*,\underline{e})^\nu_\mu = \eta_{\mu,\rho}M(A,\underline{e})^\rho_\sigma \eta^{\sigma,\nu}$. Hier ist $\eta^{\mu,\nu}$ durch $\eta^{\mu,\beta}\eta_{\beta,\nu}=\delta^\mu_\nu$ definiert. Die Menge der linearen Abbildungen $A: V\to V$, mit $\langle Av, Aw\rangle = \langle v,w\rangle$ für alle $v,w\in V$ ist die Invarianzgruppe L von $\langle\cdot,\cdot\rangle$, die Lorentzgruppe[3].

   (a) Zeigen Sie: $A\in L \Leftrightarrow A^*A = id_V \Leftrightarrow M(A,\underline{e})^\alpha_\mu \eta_{\alpha,\beta} M(A,\underline{e})^\beta_\nu = \eta_{\mu,\nu}$.

   (b) Zeigen Sie: $A\in L \Rightarrow (\det(A))^2 = 1$ und $\left(M(A,\underline{e})^0_0\right)^2 \geq 1$.

   (c) Sei $A: (-\varepsilon,\varepsilon)\to L$ diffbar und $A(0)=id_V =: e$. Zeigen Sie für $T := \left(\frac{d}{dt}A\right)(0)$, dass $T^* = -T$ oder äquivalent dazu $\eta_{\mu,\rho}M(T,\underline{e})^\rho_\nu = -M(T,\underline{e})^\rho_\mu \eta_{\rho,\nu}$.

   (d) Sei $T\in End(V)$ mit $T^*=-T$. Dann gilt für die Kurve[4] $A:\mathbb{R}\to End(V), t\mapsto A(t) = \exp(tT)$, dass $A(\mathbb{R})\subset L$ und $\left(\frac{d}{dt}A\right)(0) = T$ und $A(0)=e$. Der Tangentialraum der (nichtlinearen) Gruppenmannigfaltigkeit L in e ist somit der reelle Vektorraum

   $$\mathfrak{l} = T_eL = \{T: V\to V \mid T \text{ ist linear und } T^* = -T\}\,.$$

   Er ist ein UVR von $End(V)$. Zeigen Sie, dass der Kommutator zweier Elemente von $\mathfrak{l}$ in $\mathfrak{l}$ ist, dass also $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{l}\times\mathfrak{l}\to\mathfrak{l}$ gilt.[5]

   (e) Sei $v,w\in V$ und $T_{v,w}: V\to V, x\mapsto v\langle w,x\rangle - w\langle v,x\rangle$. Zeigen Sie $T_{v,w}\in\mathfrak{l}$. Verifizieren Sie

   $$[T_{a,b}, T_{v,w}] = \langle a,w\rangle T_{b,v} - \langle a,v\rangle T_{b,w} + \langle b,v\rangle T_{a,w} - \langle b,w\rangle T_{a,v}$$

   (f) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{T} := \left\{M_{\alpha,\beta} := T_{e_\alpha,e_\beta} \mid \alpha,\beta = 0,..3 \text{ mit } \alpha<\beta\right\}\subset\mathfrak{l}$ eine Basis von $\mathfrak{l}$ ist. Zeigen Sie: M_{0i} ist Boostgenerator in Richtung $-e_i$ und $M_{1,2}$ ist Drehgenerator im "Rechtsschraubensinn" um e_3. (zyklisch)

   (g) Zeigen Sie (nur bei Bedarf):

   $$\begin{aligned}
   \exp(tM_{0,1}) &: e_0\mapsto \cosh(t)e_0 - \sinh(t)e_1,\\
   \exp(tM_{0,1}) &: e_1\mapsto -\sinh(t)e_0 + \cosh(t)e_1, \quad e_2\mapsto e_2, \quad e_3\mapsto e_3,\\
   \exp(tM_{1,2}) &: e_1\mapsto \cos(t)e_1 + \sin(t)e_2\\
   \exp(tM_{1,2}) &: e_2\mapsto -\sin(t)e_1 + \cos(t)e_2, \quad e_0\mapsto e_0, \quad e_3\mapsto e_3.
   \end{aligned}$$

2. **Diracs Darstellung von $\mathfrak{l}$:** Alle Bezeichnungen wie in 1). Sei nun $\mathcal{E}$ die Menge aller Abbildungen von V nach $W := \mathbb{C}^4$. Für jedes $A\in L$ in einer (hinreichend kleinen) Umgebung U von $e\in L$ existiere ein $\widetilde{A}\in End(W)$, sodass $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\widetilde{B}$ für alle $A,B\in U$. Dann ist auf $\mathcal{E}$ die folgende lokale, lineare Darstellung von L definiert:

   $$\widehat{A}f = \widetilde{A}\circ f\circ A^{-1}: V\to W, x\mapsto \widetilde{A}\left(f\left(A^{-1}x\right)\right) \text{ für } x\in V,\ A\in U\subset L \text{ und } f\in\mathcal{E}.$$

   Für $f\in\mathcal{E}$ diffbar sei $\partial_\mu f\in\mathcal{E}$ durch $(\partial_\mu f)(x) = d_xf(e_\mu) = \lim_{\xi\to 0}\left(f(x+\xi e_\mu) - f(x)\right)/\xi$ definiert.

   (a) Zeigen Sie für $A,B\in U$, dass $\widehat{AB} = \widehat{A}\widehat{B}$, $\widehat{e} = id_{\mathcal{E}}$ und $\widehat{A^{-1}} = \widehat{A}^{-1}$.

   (b) Zeigen Sie mit der Kettenregel für diffbares $f\in\mathcal{E}$, dass $\partial_\mu\widehat{A}f = M(A^{-1},\underline{e})^\rho_\mu\cdot\widehat{A}\partial_\rho f$.

---

[1] Literatur: J D Bjorken, S D Drell, *Relativistische Quantenmechanik*, Vol 1, Kap 2, Mannheim, 1966

[2] Also gilt $\langle e_\mu, e_\nu\rangle = \delta^0_\mu\delta^0_\nu - \sum_{i=1}^3 \delta^i_\mu\delta^i_\nu =: \eta_{\mu,\nu}$

[3] Ihr systematischer Name ist $O(1,3)$. Sie ist eine Untergruppe von $Gl(V)\simeq Gl_{\mathbb{R}}(4)$.

[4] Zur Exponentialfunktion auf $End(V)$ siehe zB: V I Arnold, *Gewöhnliche Differentialgleichungen,* Berlin, 1980.

[5] Der VR $\mathfrak{l}$ mit dem schiefen Produkt $[\cdot,\cdot]$ ist die Liealgebra von L.

(c) Sei $\gamma^\mu \in Gl\left(\mathbb{C}^4\right)$ und $\delta f := \gamma^\mu \circ \partial_\mu f$ für diffbares $f \in \mathcal{E}$. Zeigen Sie

$$\delta\widehat{A} = \widehat{A}\delta \Leftrightarrow \gamma^\mu \widetilde{A} = \widetilde{A}\gamma^\rho M(A, \underline{e})^\mu_\rho.$$

(d) Für $T \in \mathfrak{l}$ existiert genau ein $\widetilde{T} \in End(W)$ mit $\widetilde{\exp(\varepsilon T)} = \exp\left(\varepsilon\widetilde{T}\right)$ für alle ε in einer Umgebung von 0. Die Abbildung $T \mapsto \widetilde{T}$ ist linear. Es ist dies die Tangentialabbildung von $A \mapsto \widetilde{A}$. Es gilt $\left[\widetilde{S}, \widetilde{T}\right] = \widetilde{[S,T]}$. Zeigen Sie

$$\delta\widehat{A} = \widehat{A}\delta \Leftrightarrow \left[\widetilde{T}, \gamma^\mu\right] = -\gamma^\rho M(T, \underline{e})^\mu_\rho.$$

Die lokale Darstellung $A \mapsto \widetilde{A}$ von L in $End(W)$ ist somit auf eine Darstellung $T \mapsto \widetilde{T}$ der Liealgebra $\mathfrak{l}$ in $End(W)$ zurückgeführt.

(e) Nun wird Diracs Konstruktion der Darstellung von $\mathfrak{l}$ in $End(W)$ ausgebreitet. Es sei $\gamma : V \to End(W)$ linear mit $\gamma(e_\mu) = \gamma_\mu = \eta_{\mu,\nu}\gamma^\nu$ und $\left\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\right\} = 2\eta_{\mu,\nu} id_W$. Diracs Abbildung $T \mapsto \widetilde{T}$ ist dann jene lineare Abbildung von $\mathfrak{l}$ nach $End(W)$, die für alle $v, w \in V$

$$T_{v,w} = v\,\langle w, \cdot\rangle - w\,\langle v, \cdot\rangle \mapsto \widetilde{T_{v,w}} := \frac{1}{4}\left[\gamma(v), \gamma(w)\right].$$

Zeigen Sie für $S, T \in \mathfrak{l}$, dass $\left[\widetilde{S}, \widetilde{T}\right] = \widetilde{[S,T]}$ gilt. Zeigen Sie für $x \in V$ und $T \in \mathfrak{l}$, dass $\left[\widetilde{T}, \gamma(x)\right] = \gamma(Tx)$ gilt.

3. **Invarianz von** $\ker(i\delta - \kappa)$**:** Zeigen Sie, dass die lineare, lokale Darstellung von L auf $\mathcal{E}$, die durch

$$\widehat{\exp(\varepsilon T)}\,(f) = \exp\left(\varepsilon\widetilde{T}\right) \circ f \circ \exp(-\varepsilon T) \text{ für } T \in \mathfrak{l}$$

mit $\widetilde{T}$ aus 2e) definiert ist, die Lösungsmenge der Diracgleichung $(i\delta - \kappa)\,f = 0$ auf sich abbildet ("stabilisiert").