7. Übungen zu Quantentheorie II / 26. November 2002/ GG

Spinausrichtung durch Streuung[1], Paritäts- und SU_2 Symmetrie

1. Die Schrödingeroperatoren $H_0 + \widehat{V}$ und $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ in $\mathcal{H} = L^2\left(\mathbb{R}^3 : \mathbb{C}^2\right)$ seien ein Streupaar. Die Streuamplitude $T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^2\right)$ ist durch
$$\langle \chi', T(\mathbf{k}', \mathbf{k})\chi\rangle = \left\langle U_{\mathbf{k}'}\chi', \widehat{V}\left(U_{\mathbf{k}'}\chi\right)^{in}\right\rangle_{\mathcal{H}}$$
für alle $(\chi', \chi) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ implizit definiert. Hier ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt von $\mathbb{C}^2$.
Wiederholung der Spin-Gruppe SU_2: Sei $\sigma : \mathbb{C}^3 \to \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^2\right)$ die lineare Abbildung, die die Standardbasis von $\mathbb{C}^3$ auf die Paulimatritzen abbildet, d.h. $\sigma(e_i) = \sigma_i$. Zu jedem $A \in SU_2 \subset \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^2\right)$ existiert genau ein $\widetilde{A} \in SO_3$ sodass $A\sigma(\mathbf{x})A^* = \sigma(\widetilde{A}\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Es gilt $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\widetilde{B}$ für alle $A, B \in SU_2$. Die Abbildung $\pi : SU_2 \to SO_3, A \mapsto \widetilde{A}$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus und jeder Punkt in SO_3 hat genau 2 Urbilder; $\pi(A) = \pi(-A)$. Damit ist die Spin-Gruppe SU_2 auf $\mathcal{H}$ unitär dargestellt durch
$$\left(\widehat{A}\phi\right)(\mathbf{x}) = A\left(\phi\left(\widetilde{A}^{-1}\mathbf{x}\right)\right).$$
Explizit: Für $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\mathbf{n}| = 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $A = \exp(-i\frac{\alpha}{2}\sigma(\mathbf{n})) \in SU_2$ und $\widetilde{A} = \exp(-i\alpha l(\mathbf{n})) \in SO_3$ wobei $l(\mathbf{n}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{v}$. Damit ist $\widetilde{A}$ eine Drehung um die Achse $\mathbb{R}\mathbf{n}$ um den Winkel α mit der Standardorientierung.
Der Wirkungsquerschnitt für einlaufenden Spindichteoperator $\rho = \frac{1}{2}\left(I_2 + \sigma(\boldsymbol{\pi})\right)$ und Spinanalysator $P = P^2 = P^* \in \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^2\right)$ erfüllt für $\mathbf{n} = \mathbf{k}'/\left|\mathbf{k}\right|$ mit $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| \neq 0$ und $|\boldsymbol{\pi}| \leq 1$
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{k},\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{n}, P) = \left(\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2}\right)^2 Sp\left(PT(\mathbf{k}', \mathbf{k})\rho T(\mathbf{k}', \mathbf{k})^*\right).$$
Für die Projektionen $P = \frac{1}{2}\left(I_2 + \sigma(\boldsymbol{\pi}')\right)$ mit $|\boldsymbol{\pi}'| = 1$ wird $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{k},\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{n}, P) =: \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{k},\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\pi}')$ notiert.

   (a) Die Paulimatritzen bilden zusammen mit der Einheitsmatrix I_2 eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathcal{L}\left(\mathbb{C}^2\right)$. Daher existieren Funktionen $S : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ und $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^3$, sodass
$$T(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = S(\mathbf{k}', \mathbf{k})I_2 + \sigma\left(\mathbf{V}(\mathbf{k}', \mathbf{k})\right).$$
   Sei nun $A \in SU_2$ und $(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: Aus $\left[\widehat{A}, \widehat{V}\right] = 0$ folgt
$$A^* T(\widetilde{A}\mathbf{k}', \widetilde{A}\mathbf{k})A = T(\mathbf{k}', \mathbf{k}). \tag{1}$$
   Zeigen Sie, dass (1) genau dann gilt, wenn
$$S(\widetilde{A}\mathbf{k}', \widetilde{A}\mathbf{k}) = S(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \text{ und } \mathbf{V}(\widetilde{A}\mathbf{k}', \widetilde{A}\mathbf{k}) = \widetilde{A}\mathbf{V}(\mathbf{k}', \mathbf{k}). \tag{2}$$
   Sei nun $P = \frac{1}{2}\left(I_2 + \sigma(\boldsymbol{\pi}')\right)$ mit $|\boldsymbol{\pi}'| = 1$. Zeigen Sie in diesem Fall für $\mathbf{n}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}' \in S^2$ und $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3\backslash 0$, dass gilt: $\left[\widehat{A}, \widehat{V}\right] = 0 \Rightarrow$
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\widetilde{A}\mathbf{k},\widetilde{A}\boldsymbol{\pi}}\left(\widetilde{A}\mathbf{n}, \widetilde{A}\boldsymbol{\pi}'\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{k},\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\pi}').$$

   (b) Da für $(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \in U = \left\{(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| \neq 0 \text{ und } \mathbf{k}' \neq \pm\mathbf{k}\right\}$ das Tripel $\left(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}\times\mathbf{k}'|}\right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ ist, existieren $\mathbb{C}$-wertige Funktionen A, B, C, sodass auf U
$$\mathbf{V}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = A(\mathbf{k}', \mathbf{k})\mathbf{k} + B(\mathbf{k}', \mathbf{k})\mathbf{k}' + C(\mathbf{k}', \mathbf{k})\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|}.$$
   Gilt (1) für alle $A \in SU_2$, dann sagt man T ist SU_2-invariant und S bzw. V ist eine SO_3 invariante Skalar- bzw. Vektorfunktion[2]. Zeigen Sie: $\mathbf{V}$ ist genau dann SO_3 invariant, wenn A, B, C invariant unter SO_3 sind, d.h. $A(R\mathbf{k}', R\mathbf{k}) = A(\mathbf{k}', \mathbf{k})$, etc. Zu den Einschränkungen von SO_3 invarianten Funktionen A, B, C auf U existieren also Funktionen a, b, c mit $A(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = a(|\mathbf{k}|, \theta)$, etc. für $(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \in U$.[3]

[1] Lit Bsp: O Chamberlain et al, *Experiments with high energy polarized protons,* Phys Rev **93** (1954) 1430
[2] Die mathematisch allgemeine Klassifikation solcher Funktionen bieten die Begriffe Gruppenoperation und Äquivarianz.
[3] Wie bisher ist der Streuwinkel θ durch $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 \cos(\theta)$ definiert. Es gilt $0 < \theta < \pi$.

(c) Die Raumspiegelung Π ist auf $\mathcal{H}$ durch $(\Pi\psi)(\mathbf{x}) = \psi(-\mathbf{x})$ definiert. Zeigen Sie: aus $\left[\Pi, \widehat{V}\right] = 0$ und $\left[\widehat{A}, \widehat{V}\right] = 0$ für alle $A \in SU_2$ folgt, dass $a = b = 0$.[4] Im Weiteren wird Raumspiegelungs- und SU_2 Invarianz von $\widehat{V}$ vorausgesetzt. Zeigen Sie für den unpolarisierten, einlaufenden Spinzustand $\rho = I_2/2$, dass

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{k},0}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\pi}') = \left(\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{2}\left\{|s(|\mathbf{k}|, \theta)|^2 + |c(|\mathbf{k}|, \theta)|^2 + 2\Re\left((\overline{c}s)(|\mathbf{k}|, \theta)\right)\frac{\boldsymbol{\pi}' \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{k}')}{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|}\right\}.$$

Zeigen Sie für den Polarisationsvektor $\mathbf{S}$ des "in Richtung $\mathbf{k}'$ auslaufenden" Spindichteoperators

$$\rho_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} := \frac{T(\mathbf{k}', \mathbf{k})\rho T(\mathbf{k}', \mathbf{k})^*}{Sp\left(T(\mathbf{k}', \mathbf{k})\rho T(\mathbf{k}', \mathbf{k})^*\right)},$$

im Fall $\rho = I_2/2$, dass

$$\mathbf{S} = \frac{2\Re\left((\overline{c}s)(|\mathbf{k}|, \theta)\right)}{|s(|\mathbf{k}|, \theta)|^2 + |c(|\mathbf{k}|, \theta)|^2}\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|}.$$

Kontrollieren Sie $|\mathbf{S}| \leq 1$.

(d) $V_i \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R}\right)$ für $i = 1, 2$ seien O_3-invariante Funktionen. Das Potential $\widehat{V}$ sei durch

$$\left(\widehat{V}\psi\right)(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) + V_2(\mathbf{x})(-i)\sum_{a=1}^{3}\sigma_a\left(\mathbf{x} \times \boldsymbol{\nabla}\psi(\mathbf{x})\right)^a$$

gegeben. $\widehat{V}$ enthält also eine Spin-Bahn-Kopplung. Für $\rho = I_2/2$ gilt in Bornapproximation $\mathbf{S} = 0$. Zeigen Sie das.

[4] $\widehat{V}$ ist invariant unter der Pin-Gruppe $SU_2 \times \mathbb{Z}_2$.