

Differentieller Streuquerschnitt in Bornapproximation, Formfaktor

1. Sei mit $v \in \mathbb{R}$ und $\kappa > 0$ die Funktion $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto v \exp(-\kappa |\mathbf{x}|) / (4\pi\kappa |\mathbf{x}|)$. Es gilt im distributionellen Sinn (siehe Ü2, 1c)

$$(-\Delta + \kappa^2)V = \frac{v}{\kappa} \delta^3 \text{ und } (2\pi)^{\frac{3}{2}} (\mathcal{F}V)(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x = \frac{v}{\kappa} \left(|\mathbf{k}|^2 + \kappa^2 \right)^{-1}.$$

Sei \widehat{V} der Multiplikationsoperator zur Funktion V . Die Schrödingeroperatoren $H_0 + \widehat{V}$ und $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$ sind ein Streupaar. \widehat{V} ist invariant unter O_3 . Daher existiert eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass mit¹ $\mathbf{q} := \mathbf{k}' - \mathbf{k} = |\mathbf{k}| \mathbf{n} - \mathbf{k}$ und $q := |\mathbf{q}| = 2|\mathbf{k}| \sin(\theta/2)$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\mathbf{k}}^B(\mathbf{n}) = f(q) \quad \text{für alle } (\mathbf{k}, \mathbf{n}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \text{ mit } |\mathbf{n}| = 1 \text{ und } q > 0.$$

In Bornapproximation vereinfacht sich also der Streuquerschnitt eines O_3 invarianten Potentials von einer Funktion $f(|\mathbf{k}|, \theta)$ zu einer Funktion $f(|\mathbf{k}| \sin(\theta/2))$.

- (a) Zeigen Sie für das obige Potential V , dass mit $E = \frac{\hbar^2}{2m} |\mathbf{k}|^2$ (einlaufende Energie) und $\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} \kappa^2$

$$f(q) = (4\pi\kappa)^{-2} \left(\frac{v}{\varepsilon} \right)^2 \left[(q/\kappa)^2 + 1 \right]^{-2} = \left[4\pi\kappa \left(4 \frac{E}{v} \sin^2(\theta/2) + \frac{\varepsilon}{v} \right) \right]^{-2}.$$

f hat einen "Vorwärtsstreupeak", der umso ausgeprägter ist, je größer die Einschussenergie E ist (Fig 1). Bei festem Wert $\frac{v}{4\pi\kappa} = C$ konvergiert $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\mathbf{k}}^B$ für $\varkappa \rightarrow 0$ gegen den Rutherfordstreuquerschnitt (siehe Übg 1), d.h. es gilt $\lim_{\kappa \rightarrow 0} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\mathbf{k}}^B(\mathbf{n}) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\hbar\mathbf{k}}^R(\mathbf{n})$.

- (b) Zeigen Sie für den totalen Streuquerschnitt in Bornapproximation, dass mit $\sigma_g := \pi\kappa^{-2}$ (naiv geometrischer Querschnitt)

$$\sigma^B(E) := \int_{S^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\mathbf{k}}^B d\Omega = \sigma_g \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \left(\frac{v}{\varepsilon} \right) \frac{v}{4E + \varepsilon}.$$

Bei der Streuung eines Neutrons an einem Atomkern sind die Werte der Modellparameter ungefähr wie folgt: $v = -10 \text{ MeV}, mc^2 = 1 \text{ GeV}, \kappa^{-1} = 1 \text{ fm}$. Skizzieren Sie $\sigma^B(E) / (\pi\kappa^{-2})$ im Bereich $1 \text{ MeV} < E < 10 \text{ MeV}$. Welchen Wert hat $\sigma^B(E)$ für $E = 1 \text{ MeV}$? (Siehe Fig 2)

- (c) Sei² $\rho(\mathbf{x}) = (3 / (4\pi R^3)) \Theta(R - |\mathbf{x}|)$ und $V_R(\mathbf{x}) = (2\pi)^{3/2} (V * \rho)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') d^3x'$ dann gilt $(-\Delta + \kappa^2)V_R = \frac{v}{\kappa} \rho$. Zeigen Sie für die Bornapproximation des diff Streuquerschnitts von \widehat{V}_R , dass³ mit $F_R(q) := (2\pi)^{3/2} (\mathcal{F}\rho)(\mathbf{q}) = \frac{3}{(Rq)^3} [\sin(qR) - qR \cos(qR)]$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{R,\mathbf{k}}^B(\mathbf{n}) = |F_R(q)|^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\mathbf{k}}^B(\mathbf{n}).$$

Der Formfaktor $|F_R(q)|^2$ unterdrückt den Streuquerschnitt von \widehat{V}_R bei hohen Impulsüberträgen gegenüber dem Streuquerschnitt von \widehat{V} . Bei kleinen Impulsüberträgen stimmen beide Streuquerschnitte überein, denn $\lim_{q \rightarrow 0} F_R(q) = 1$. Kontrollieren Sie das. (Fig 3, 4)

¹ $\hbar\mathbf{q}$ heißt Impulsübertrag und θ ist der Streuwinkel, d.h. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{k}| \cos(\theta)$.

² Die Singularität von V bei 0 wird durch Falten mit ρ geglättet; ρ heißt "Mollifier".

³ Hinweis: Der Faltungssatz ist anwendbar und sagt $\mathcal{F}(V * \rho) = \mathcal{F}(V) \mathcal{F}(\rho)$.

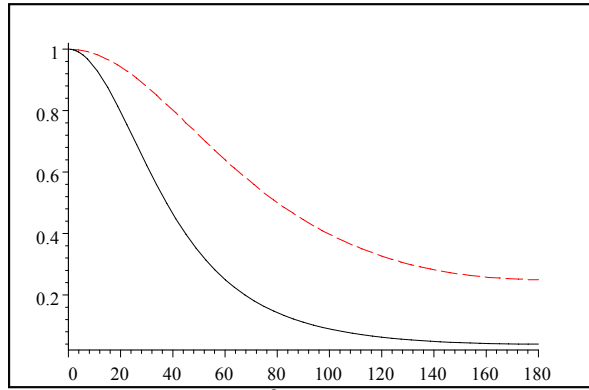


Fig. 1: Graph von $\theta \mapsto [n \sin^2(\frac{\pi}{180} \frac{\theta}{2}) + 1]^{-2}$ für $n = 4$ (durchgezogen) und $n = 1$ (strichliert)

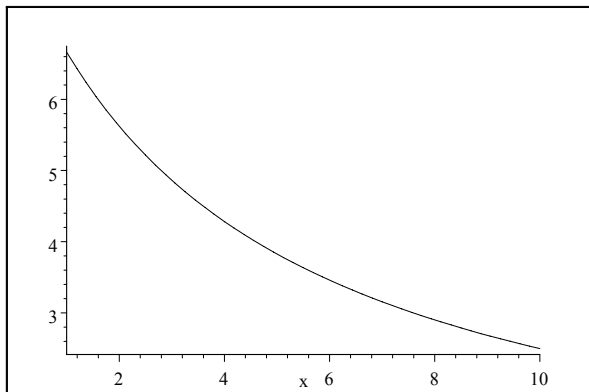


Fig. 2: Graph von $x \mapsto 1000 \frac{\sigma^B(x \cdot 1 \text{ Mev})}{\pi \kappa^{-2}}$

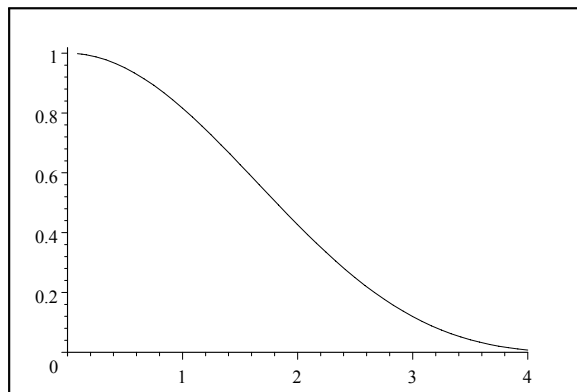


Fig. 3: Der Graph von $x \mapsto (\frac{3}{x^3} (\sin(x) - x \cos(x)))^2$

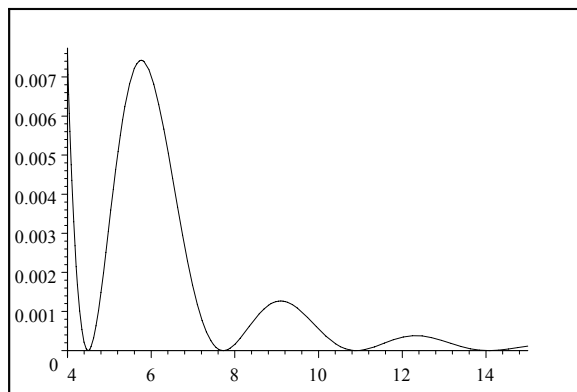


Fig. 4: Der Graph von $x \mapsto (\frac{3}{x^3} (\sin(x) - x \cos(x)))^2$