5. Übungen zu Quantentheorie II / 5. und 12. November 2002/ GG

Quantenstreuung: Lippmann - Schwinger Gleichung

1. Der (parameterbereinigte) Schrödingeroperator h für die Streuung an einem 1d Potentialtopf ist mit $v > 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ durch
$$h = -\Delta_1 + V = -\frac{d^2}{dx^2} - v\Theta(1 - |x|)$$
gegeben. Sei für $k \in \mathbb{R}$ die Funktion $U_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikx)$. Der 2d $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{E}_{k^2}$ der differenzierbaren Funktionen mit stetiger erster Ableitung, für die in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ die Differenzialgleichung
$$y''(x) + k^2 y(x) + v\Theta(1 - |x|)y(x) = 0$$
gilt, ist der verallgemeinerte Eigenraum von h zum Spektralwert k^2. Sei nun $k > 0$. Die Funktionen U_k^{in} und U_{-k}^{in} sind jene Elemente von $\mathcal{E}_{k^2}$, für die Konstante $R_k, T_k \in \mathbb{C}$ existieren, sodass
$$U_k^{in} = \begin{cases} U_k + R_k U_{-k} & \text{auf} \quad x < -1 \\ T_k U_k & \text{auf} \quad x > 1 \end{cases}, \quad U_{-k}^{in} = \begin{cases} T_{-k} U_{-k} & \text{auf} \quad x < -1 \\ U_{-k} + R_{-k} U_k & \text{auf} \quad x > 1 \end{cases}.$$
Es gilt mit $q := \sqrt{v + k^2} > 0$ und $N := 2kq \cos(2q) - i(q^2 + k^2) \sin(2q)$ für $k > 0$
$$R_k = \frac{iv \exp(-2ik) \sin(2q)}{N}, \quad T_k = \frac{2kq \exp(-2ik)}{N}.$$
Im Bereich $-1 < x < 1$ gilt $U_k^{in} = \alpha_k U_q + \beta_k U_{-q}$ mit
$$\alpha_k = \frac{k(k+q) \exp(-i(k+q))}{N}, \quad \beta_k = \frac{k(q-k) \exp(i(q-k))}{N}.$$
für $k > 0$. Bemerkungen:

   - Der Wahrscheinlichkeitsstrom $j_\psi = 2\Im \left[\overline{\psi} \psi'\right]$ ist für $\psi = U_k^{in}$ konstant auf ganz $\mathbb{R}$. Es gilt
   $$j_k^{in} = k\left(1 - |R_k|^2\right) = q\left(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2\right) = k\,|T_k|^2.$$
   - Wegen der Invarianzen $[P, h] = 0$ und $[P, \Delta_1] = 0$ für $(Pf)(x) = f(-x)$ und wegen $PU_k = U_{-k}$ gilt $U_{-k}^{in} = PU_k^{in}$. Für alle $k \neq 0$ folgt daher $R_{-k} = R_k, T_{-k} = T_k, \alpha_{-k} = \beta_k$.
   - Explizite Rechnung mit der Resolvente von Übg2 zeigt, dass punktweise auf ganz $\mathbb{R}$ gilt
   $$U_k^{in} = U_k - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(-\Delta_1 - k^2 - i\varepsilon\right)^{-1} V U_k^{in}. \tag{1}$$

   (a) Kontrollieren Sie (1) für $k > 0$ im Bereich $x > 1$.

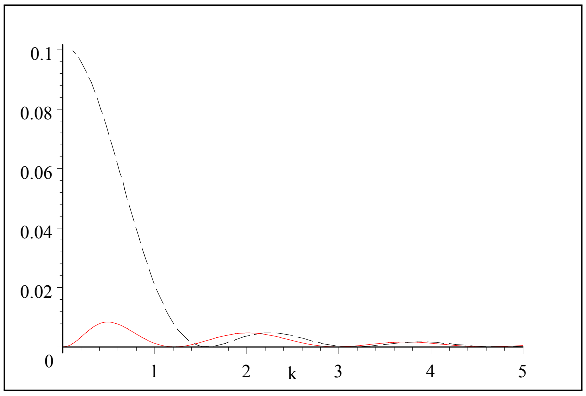
   (b) Berechnen Sie die (off-shell) Streuamplitude $T(k', k) := \left\langle U_{k'}, V U_k^{in} \right\rangle$ und zeigen Sie, dass
   $$T(k, k) = \frac{ik}{\pi}(T_k - 1), \quad T(-k, k) = \frac{ik}{\pi} R_k.$$

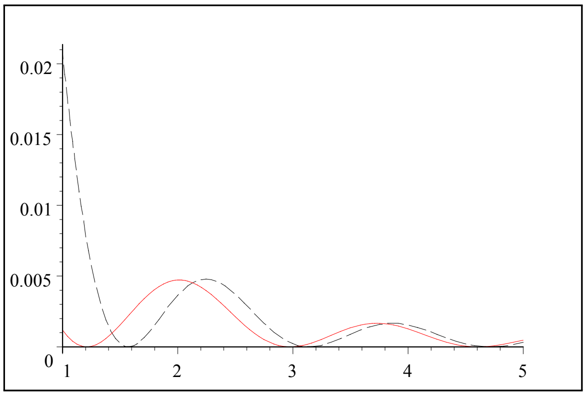
   (c) Berechnen Sie die Bornapproximation $T^{(1)}(\pm k, k) := \langle U_{\pm k}, V U_k \rangle$ und zeigen Sie
   $$\lim_{k\to\infty} \frac{T(-k,k)}{T^{(1)}(-k,k)} = 1 \text{ und } \lim_{k\to\infty} k^\eta \left[|T(-k,k)|^2 - \left| T^{(1)}(-k,k) \right|^2 \right] = 0 \text{ für } \eta < 3.$$

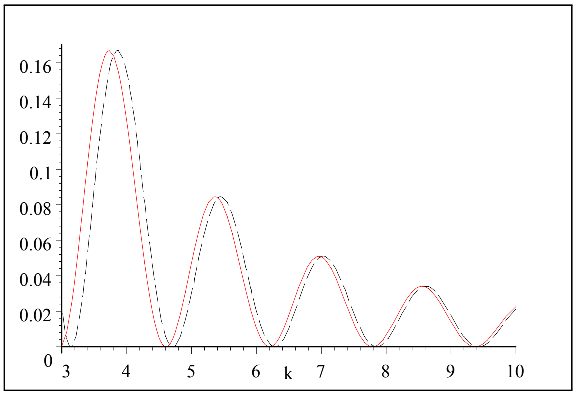
   (d) Berechnen Sie die Funktionen $U_k^{out} := \overline{U_{-k}^{in}}$ und zeigen Sie $U_k^{out} \in \mathcal{E}_{k^2}$. Leiten Sie aus (1) ab, dass
   $$U_k^{out} = U_k - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(-\Delta_1 - k^2 + i\varepsilon\right)^{-1} V U_k^{out}.$$

   (e) Sei nun $\widetilde{S} : \mathcal{E}_{k^2} \to \mathcal{E}_{k^2}$ jene lineare Abbildung, für die $\widetilde{S} : U_{\pm k}^{in} \mapsto U_{\pm k}^{out}$ gilt. Welche Darstellungsmatrix hat $\widetilde{S}$ bezüglich der Basis $\left(U_k^{in}, U_{-k}^{in}\right)_{k>0}$? Kontrollieren Sie $\left[\widetilde{S}, P\right] = 0$. Lesen Sie an $\widetilde{S}$ die Fourierdarstellung des Streuoperators $S = \Omega_{out}^* \Omega_{in}$ ab.

Die Funktion $k \mapsto |T(-k,k)|^2$ (durchgezogen) zusammen der Bornapproximation $k \mapsto \left|T^{(1)}(-k,k)\right|^2$ (strichliert) für $v = 1$:







Funktionen mal 10^2