4. Übungen zu Quantentheorie II / 29. Oktober 2002/ GG

Scattering into Cones Theorem, Lokalisierung in Kugelschalen und Symmetrien

$H_0 := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ und $H := H_0 + V$ sei ein (asymptotisch vollständiges) Streupaar in $\mathcal{H} = L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ und

$$\psi_t^{in} := \exp(-iHt/\hbar)\psi^{in}, \quad \psi^{in} = \Omega_{in}\psi := s - \lim_{t\to-\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t}\psi \text{ für } \psi \in L^2\left(\mathbb{R}^3\right).$$

1. Leiten Sie aus Dollards Lemma für $\psi \in L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ ab, dass für $R > 0$ und (messbares) $\Delta \subset S^2$ gilt[1]

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Delta d_{\mathbf{n}}\Omega\int_R^\infty \lambda^2\left|\psi_t^{in}(\lambda\mathbf{n})\right|^2 d\lambda = \int_\Delta d_{\mathbf{n}}\Omega\int_0^\infty \lambda^2\left|(\mathcal{F}S\psi)(\lambda\mathbf{n})\right|^2 d\lambda.$$

   Hinweis: Ersetzen Sie in $\int_\Delta d_{\mathbf{n}}\Omega\int_R^\infty \lambda^2\left|\psi_t^{in}(\lambda\mathbf{n})\right|^2 d\lambda$ die Streulösung ψ_t^{in} durch $\exp(-iH_0t/\hbar)S\psi$ (warum?), dann wenden Sie Dollards Lemma für freie Evolutionen an. Damit erhalten Sie einen Zusammenhang zwischen einer Orts und einer Impulswahrscheinlichkeit für $\exp(-iH_0t/\hbar)S\psi$.

2. Es gelte $\int_{k_1<|\mathbf{k}|<k_2}|(\mathcal{F}\psi)(\mathbf{k})|^2 d^3k = \|\psi\|^2 = 1$ für zwei positive reelle Konstanten k_1 und k_2. Zeigen Sie mithilfe von Dollards Lemma, dass

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\frac{\hbar k_1}{m}t<|\mathbf{x}|<\frac{\hbar k_1}{m}t}\left|\psi_t^{in}(\mathbf{x})\right|^2 d^3x = 1.$$

   Hinweis: Hier benötigen Sie zusätzlich zur Vorgangsweise in 1), dass $[S, H_0] = 0$.

3. Die Gruppe der Drehspiegelungen O_3 hat auf $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ die unitäre Darstellung $\widehat{R}(\psi) = \psi\circ R^{-1}$. Die Bewegungsumkehr (Zeitspiegelung) ist die antiunitäre Abbildung $\Theta : L^2\left(\mathbb{R}^3\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$, mit $\Theta(\psi) = \overline{\psi}$. Der Operator H heißt O_3-invariant, falls $\left[\widehat{R}, H\right] = 0$ für alle $R \in O_3$.

   (a) Zeigen Sie: $\left[\widehat{R}, H\right] = 0 \Rightarrow \left[\widehat{R}, \Omega_{in,out}\right] = 0$ und $\left[\widehat{R}, S\right] = 0$.

   (b) Zeigen Sie: $[\Theta, H] = 0 \Rightarrow \Omega_{out,in}\Theta = \Theta\Omega_{in,out}$ und $S\Theta = \Theta S^*$.
   Die differenziellen Wirkungsquerschnitte zu Paketfolgen $\Phi_{\mathbf{k}} = (\phi_N)$ mit $\langle\phi_N, -i\boldsymbol{\nabla}\phi_N\rangle = \mathbf{k} \neq 0$ definieren auf $U = \left\{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|, \mathbf{k} \neq \mathbf{k}' \neq 0\right\}$ die (folgenunabhängige) reellwertige Funktion

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Phi_{\mathbf{k}}}\left(\frac{\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}'|}\right).$$

   (c) Zeigen Sie, dass bei O_3-invariantem H für alle $R \in O_3$ im gesamten Definitionsbereich U

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(\mathbf{k}, \mathbf{k}'\right) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(R\mathbf{k}, R\mathbf{k}')$$

   gilt. Es gibt somit eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0}\times(0,\pi) \to \mathbb{R}$, sodass $\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(\mathbf{k}, \mathbf{k}'\right) = f(|\mathbf{k}|, \theta)$, mit $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' = |\mathbf{k}|^2\cos(\theta)$. Warum?

   (d) Schließen Sie analog aus $[\Theta, H] = 0$ auf $\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(\mathbf{k}, \mathbf{k}'\right) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(-\mathbf{k}', -\mathbf{k})$ (auf ganz U).

[1] Der Streuoperator ist durch $S = \Omega_{out}^*\Omega_{in}$ definiert. Er bildet die einlaufende Asymptote einer Streulösung auf die auslaufende Asymptote *derselben* Streulösung ab.