3. Übungen zu Quantentheorie II / 22. Oktober 2002/ GG

Freier Schrödingerpropagator und Dollards Asymptote

1. Sei $-h := \Delta_s$ der (s.a.) Laplaceoperator in $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^s)$. Rechnen Sie für $\psi \in \mathcal{H}$, über die Fourierdarstellung von $\exp(-iht)$ (formal) nach, dass für $t \in \mathbb{R}\backslash 0$

$$\left(e^{-iht}\psi\right)(\mathbf{x}) = (4\pi i t)^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^s} \exp\left(i\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}\right)\psi(y)d^s y.$$

Hier ist die Wurzel so definiert, dass $\Re\left((it)^{1/2}\right) > 0$.

2. Sei $H_0 := \frac{\hbar^2}{2m}h$ mit h wie in 1) für $s = 1$ und sei $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}}\Theta(L - |x|)$ für $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Überprüfen Sie für Dollards Asymptote[1] ψ_t^D von $\exp(-iH_0 t/\hbar)\psi$, dass $\left\|\psi_t^D\right\| = \|\psi\| = 1$. Die Ortsdichte von ψ_t^D ist somit $\left|\psi_t^D(x)\right|^2 \cdot |dx|$. Zeigen Sie auf $\mathbb{R}\backslash 0$

$$\left|\psi_t^D(x)\right|^2 \cdot |dx| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\tau}{|t|} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\tau}{t}\xi\right)}{\left(\frac{\tau}{t}\xi\right)^2} \cdot |d\xi|$$

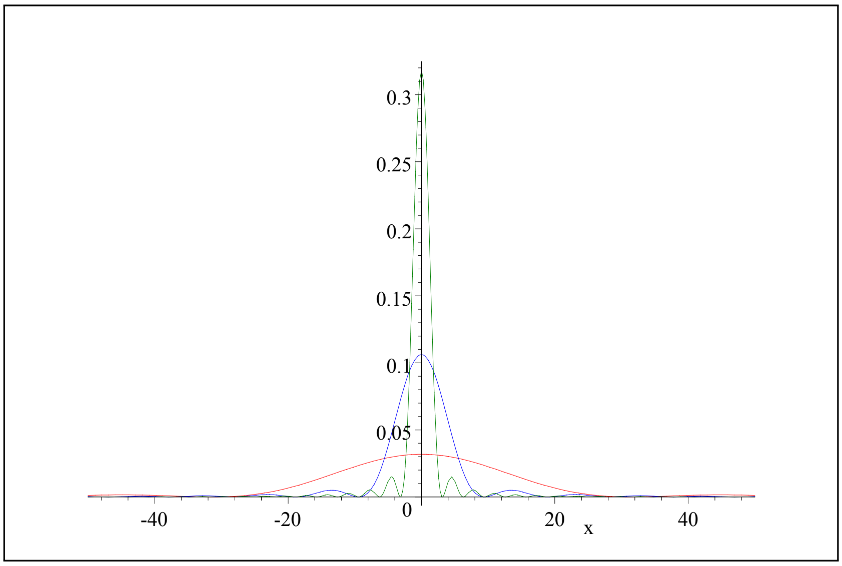
   Hier ist $\tau := mL^2/\hbar$ eine problemangepasste Zeitkonstante und $\xi := x/L$.

   (b) Skizzieren Sie den Grafen von $\xi \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{\tau}{|t|}\frac{\sin^2\left(\frac{\tau}{t}\xi\right)}{\left(\frac{\tau}{t}\xi\right)^2}$ für $\frac{t}{\tau} = 1, 3, 10$.

   (c) Zeigen Sie für $t \neq 0$

$$\int_{-L}^{L} \left|\psi_t^D(x)\right|^2 dx \leq \frac{2\tau}{\pi|t|}.$$

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 < 1$ für $x \neq 0$.



Graf von $f(x) = \frac{1}{n\pi} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right)^2$ für $n = 1, 3, 10$ (grün,blau,rot)

[1] Für alle $\psi \in L^2(\mathbb{R}^s)$ gilt $\lim_{t\to\pm\infty}\left\|\exp(-iH_0 t/\hbar)\psi - \psi_t^D\right\| = 0$ mit

$$\psi_t^D(\mathbf{x}) := \left(\frac{m}{i\hbar t}\right)^{s/2} \exp\left(\frac{im|\mathbf{x}|^2}{2\hbar t}\right)(\mathcal{F}\psi)\left(\frac{m\mathbf{x}}{\hbar t}\right).$$