2. Übungen zu Quantentheorie II / 15. Oktober 2002/ GG

Quantenstreuung: Resolvente des freien Schrödingeroperators

1. Sei Δ_n der (s.a.) Laplaceoperator in $\mathcal{H} := L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$. Die Resolvente von $-\Delta_n$ ist die Abbildung

$$R_n : \mathbb{C} \to L_u(\mathcal{H}), \quad z \mapsto -(\Delta_n + z)^{-1}.$$

Für $z \in U := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0 \Rightarrow \Re(z) < 0\}$ gilt: $R_n(z) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist beschränkt und hat die Fourierdarstellung

$$\left(R_n(z)f\right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x' \left[\int_{\mathbb{R}^n} d^n k \frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'))}{|\mathbf{k}|^2 - z}\right] f(\mathbf{x}').$$

(a) Zeigen Sie für $n = 1, 3$ und $z \in U$ für die Funktion $K_{n,z} : \mathbb{R}^n \backslash 0 \to \mathbb{C}$

$$K_{n,z}(\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n k \frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}{|\mathbf{k}|^2 - z}$$

(Integralkern[1] der Resolvente in z), dass[2]:

$$\begin{aligned} K_{1,z}(x) &= \frac{i}{2\sqrt{z}} \exp\left(i\sqrt{z}\,|x|\right), \\ K_{3,z}(\mathbf{x}) &= \frac{\exp\left(i\sqrt{z}\,|\mathbf{x}|\right)}{4\pi\,|\mathbf{x}|}. \end{aligned}$$

(b) Leiten Sie aus a) für $n = 1, 3$ und $z \in U$ den Integralkern $G_{n,z}$ von $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_n - z\right)^{-1}$ ab und bestimmen Sie die punktweisen Limiten $G^{\pm}_{n,E}(\mathbf{x}) := \lim G_{n,E\pm i\varepsilon}(\mathbf{x})$ mit $E > 0$, $\varepsilon > 0$ für $\varepsilon \to 0$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} G^{\pm}_{1,E}(\mathbf{x}) &= \pm i\sqrt{\frac{m}{2E\hbar^2}} \exp\left(\pm i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,|x|\right), \\ G^{\pm}_{3,E}(\mathbf{x}) &= \frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi\,|\mathbf{x}|} \exp\left(\pm i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,|\mathbf{x}|\right) \end{aligned}$$

(c) Leiten Sie für $\kappa \in \mathbb{C}$ mit $\Re\kappa > 0$ aus a) ab, dass[3]

$$\begin{aligned} K_{1,-\kappa^2}(x) &= \frac{\exp\left(-\kappa\,|x|\right)}{2\kappa}, \\ K_{1,-\kappa^2}(x) &= \frac{\exp\left(-\kappa\,|\mathbf{x}|\right)}{4\pi\,|\mathbf{x}|}. \end{aligned}$$

Leiten Sie daraus (sofern existent) für $n = 1, 3$ und $\kappa > 0$ die punktweisen Limiten von $K_{n,-\kappa^2}(\mathbf{x})$ für $\kappa \to 0$ ab. (Potential einer Punktladung)

---

[1] Als Distribution aufgefasst, löst $K_{n,z}$ somit die partielle Differentialgleichung $-\left(\Delta_n + z\right) K_{n,z} = \delta^n$.

[2] Hier ist die Wurzelfunktion auf $\mathbb{C}$ wie folgt definiert: Für jedes $z \neq 0$ existiert genau ein δ mit $0 \leq \delta < 2\pi$ mit $z = |z|\exp(i\delta)$. Dann ist $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\exp(i\delta/2)$ wobei für ein reelles $a \geq 0$ die Zahl $\sqrt{a}$ jene nichtnegative reelle Zahl ist, für die $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ gilt. Für $z = 0$ wird $\sqrt{z} = 0$ gesetzt. Für $z \in U$ gilt somit $\Im\sqrt{z} > 0$. Die Funktion $\sqrt{\ }$ ist in Punkten der positiven reellen Achse unstetig.

[3] Beachten Sie, dass die Abbildung $\kappa \mapsto -\kappa^2$ eine Bijektion von $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\}$ nach U ist.