13. Übungen zu Quantentheorie II / 28. Jänner 2003/ GG

Dirac-Externfeldproblem: Störungsreihe und Feynmangraphen

1. **Streuung und Paarerzeugung:** Der formale Streuoperator des (elektronischen) Externfeldproblems zum (physikalisch dimensionierten) Potential A ist durch die Dysonreihe

$$S = T \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \int_V d^4x \, (A_\mu J^\mu)(x) \right)$$

gegeben. Beachte: $[(eA/(\hbar c)] = 1/L$. Das Stromquantenfeld J ist das parameterreduzierte von Blatt 12 mit $[J^\mu] = 1/L^3$.

(a) Zeigen Sie für die zugehörigen Streumatrixelemente der Dysonreihe bis zur Ordnung e^1

$$\begin{aligned}
\left\langle A^*(\mathbf{k}', \varepsilon')\Omega, S^{(1)} A^*(\mathbf{k}, \varepsilon)\Omega \right\rangle &= 2\overline{\omega}(\mathbf{k})\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\, \delta_{\varepsilon', \varepsilon} + \\
&+ \frac{i}{2\pi} \frac{e}{\hbar c} \left[\left(\mathcal{F}^{-1} A_\mu \right)(k'_\kappa - k_\kappa) \right] \overline{u}(\mathbf{k}', \varepsilon') \gamma^\mu u(\mathbf{k}, \varepsilon), \\
\left\langle B^*(\mathbf{k}', \varepsilon')\Omega, S^{(1)} B^*(\mathbf{k}, \varepsilon)\Omega \right\rangle &= 2\overline{\omega}(\mathbf{k})\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\, \delta_{\varepsilon', \varepsilon} + \\
&+ \frac{-i}{2\pi} \frac{e}{\hbar c} \left[\left(\mathcal{F}^{-1} A_\mu \right)(k'_\kappa - k_\kappa) \right] \overline{v}(\mathbf{k}, \varepsilon) \gamma^\mu v(\mathbf{k}', \varepsilon'), \\
\left\langle A^*(\mathbf{k}', \varepsilon') B^*(\mathbf{k}, \varepsilon)\Omega, S^{(1)} \Omega \right\rangle &= \frac{i}{2\pi} \frac{e}{\hbar c} \left[\left(\mathcal{F}^{-1} A_\mu \right)(k'_\kappa + k_\kappa) \right] \overline{u}(\mathbf{k}', \varepsilon') \gamma^\mu v(\mathbf{k}, \varepsilon), \\
\left\langle \Omega, S^{(1)} A^*(\mathbf{k}', \varepsilon') B^*(\mathbf{k}, \varepsilon)\Omega \right\rangle &= \frac{i}{2\pi} \frac{e}{\hbar c} \left[\left(\mathcal{F}^{-1} A_\mu \right)(-k_\kappa - k'_\kappa) \right] \overline{v}(\mathbf{k}, \varepsilon) \gamma^\mu u(\mathbf{k}', \varepsilon').
\end{aligned}$$

Hier ist $\left(\mathcal{F}^{-1} A_\mu\right)(k) := (2\pi)^{-2} \int_V d^4x \exp(i \langle k, x \rangle)\, A_\mu(x)$. (Vgl.Blatt 9, Bsp.2) Beobachten Sie: Streuung tastet $\mathcal{F}^{-1}A$ im raumartigen Wellenzahl- bzw. Impulsbereich ab, und Paarerzeugung tastet im zeitartigen ab. Obige Formeln werden so kommentiert: Positronen sind wie Elektronen negativer Energie, die in der Zeit rückwärts laufen. Elektron/Positron-Paarerzeugung findet nur statt, wenn $\left(\mathcal{F}^{-1} A\right)(k) \neq 0$ für $\langle k, k \rangle > (2\kappa)^2 = (2m_e c/\hbar)^2$. Welchen Wert hat die zugehörige Frequenzschwelle?

(b) Vergleichen Sie im Grenzfall eines statischen Potentials das Elektronstreumatrixelement bis zur Ordnung e mit der Bornapproximation der Diracschen Wellenmechanik. Zeigen sie, dass hier beide Theorien übereinstimmen.

(c) Der Beitrag der Ordnung e^2 zu $\langle A^*(\mathbf{k}', \varepsilon')\Omega, S A^*(\mathbf{k}, \varepsilon)\Omega \rangle$ ist mit dem formalen Erwartungswert

$$C^{\mu,\nu}(x, y; \mathbf{k}', \varepsilon', \mathbf{k}, \varepsilon) := \langle A^*(\mathbf{k}', \varepsilon')\Omega, T\left(J^\mu(x), J^\nu(y)\right) A^*(\mathbf{k}, \varepsilon)\Omega \rangle$$

durch

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \int_{V \times V} d^4x d^4y A_\mu(x) A_\nu(y) C^{\mu,\nu}(x, y; \mathbf{k}', \varepsilon', \mathbf{k}, \varepsilon)$$

gegeben. Bei der "Berechnung" von $C^{\mu,\nu}$ durch Normalordnen ("Wickzerlegung") tritt ein Summand des Typs

$$2\overline{\omega}(k)\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\, \delta_{\varepsilon, \varepsilon'} Sp\left(\gamma^\mu S_F(x - y) \gamma^\nu S_F(y - x)\right)$$

auf. Dieser Summand ist nicht definiert, da $S_F(x - y)$ eine nichtquadrierbare Lichkegelsingularität des Typs $\left((x - y)^2 - i\varepsilon\right)^{-1}$ "enthält"[1]. Lässt man diesen undefinierten Summanden aus der Wickzerlegung von $C^{\mu,\nu}$ weg, so entsteht eine Distribution $C^{\mu,\nu}_{ren}$. Zeigen Sie

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \int_{V \times V} d^4x d^4y A_\mu(x) A_\nu(y) C^{\mu,\nu}_{ren}(x, y; \mathbf{k}', \varepsilon', \mathbf{k}, \varepsilon) =$$

$$\left(\frac{ie}{\hbar c} \right)^2 \int_{V \times V} d^4x d^4y \overline{U_{\mathbf{k}', \varepsilon'}}(x) \left(A_\mu(x) \gamma^\mu\right) \left\langle \Omega, T\left(\Psi(x), \overline{\Psi}(y)\right) \Omega \right\rangle \left(A_\nu(y) \gamma^\nu\right) U_{\mathbf{k}, \varepsilon}(y).$$

Veranschaulichen Sie die Bedeutung des Faktors $\left\langle \Omega, T\left(\Psi(x), \overline{\Psi}(y)\right) \Omega \right\rangle = i S_F(x - y)$ für $x^0 > y^0$ und $x^0 < y^0$.

---

[1] Es gilt $S_F(x) = -\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \kappa\right) \Delta_F(x)$. Die Distribution $\Delta_F(x) + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{x^2 - i\varepsilon}$ ist durch eine beschränkte Funktion darstellbar.