12. Übungen zu Quantentheorie II / 21. Jänner 2003/ GG

Diracquantenfeld

1. **Antikommutator:** Sei Ψ das parameterreduzierte freie Diracquantenfeld. Zeigen Sie, dass

$$\left\{\Psi_\alpha(x), \overline{\Psi}_\beta(y)\right\} = \left(i\gamma^\mu_{\alpha,\beta}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \kappa\delta_{\alpha,\beta}\right) i\Delta(x-y).$$

2. **Lokalität:** Sei $\Psi = A + B^*$ die Zerlegung des Diracquantenfeldes in seinen elektronischen Vernichtungs- und positronischen Erzeugungsteil. Das (fermionisch) normalgeordnete Stromquantenfeld hat die Komponenten J^μ bezüglich der Karte (x^μ)

$$J^\mu(x) := \left(\overline{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\right)_N := \overline{A}(x)\gamma^\mu A(x) - B^*(x)^T\left(\gamma^\mu\right)^T\overline{B^*}(x)^T + \overline{A}(x)\gamma^\mu B^*(x) + \overline{B^*}(x)\gamma^\mu A(x).$$

Zeigen Sie, dass

$$[J^\mu(x), J^\nu(y)] = \overline{\Psi}(x)\gamma^\mu\left\{\Psi(x), \overline{\Psi}(y)\right\}\gamma^\nu\Psi(y) - \overline{\Psi}(y)\gamma^\nu\left\{\Psi(y), \overline{\Psi}(x)\right\}\gamma^\mu\Psi(x).$$

Wegen Bsp.1) gilt somit $[J^\mu(x), J^\nu(y)] = 0$ für $\langle x-y, x-y\rangle < 0$. Hinweis: Benützen Sie Schwingers "point splitting" Formel:

$$J^\mu(x) = \lim_{x'\to x}\left\{\overline{\Psi}(x')\gamma^\mu\Psi(x) - \left\langle\Omega, \overline{\Psi}(x')\gamma^\mu\Psi(x)\Omega\right\rangle id_{\mathcal{H}}\right\}.$$

3. **Strommatrixelemente:** Zeigen Sie

$$\begin{aligned}
\langle A^*(\mathbf{k}_2,\varepsilon_2)\Omega, J^\mu(x)A^*(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1)\Omega\rangle &= \overline{U_{\mathbf{k}_2,\varepsilon_2}(x)}\gamma^\mu U_{\mathbf{k}_1,\varepsilon_1}(x),\\
\langle B^*(\mathbf{k}_2,\varepsilon_2)\Omega, J^\mu(x)B^*(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1)\Omega\rangle &= -\overline{V_{\mathbf{k}_1,\varepsilon_1}(x)}\gamma^\mu V_{\mathbf{k}_2,\varepsilon_2}(x),\\
\langle A^*(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1)B^*(\mathbf{k}_2,\varepsilon_2)\Omega, J^\mu(x)\Omega\rangle &= \overline{U_{\mathbf{k}_1,\varepsilon_1}(x)}\gamma^\mu V_{\mathbf{k}_2,\varepsilon_2}(x),\\
\langle\Omega, J^\mu(x)A^*(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1)B^*(\mathbf{k}_2,\varepsilon_2)\Omega\rangle &= \overline{V_{\mathbf{k}_2,\varepsilon_2}(x)}\gamma^\mu U_{\mathbf{k}_1,\varepsilon_1}(x).
\end{aligned}$$

Diese Matrixelemente heißen der Reihe nach: Elektronstreu-, Positronstreu-, Paarerzeugungs- und Paarvernichtungsvertizes.

4. **Neutralität des Stroms:** Zeigen Sie für den Ladungszahloperator

$$Q = \sum_\varepsilon\int_{V_0} d\mu\left(A^*(\mathbf{k},\varepsilon)A(\mathbf{k},\varepsilon) - B^*(\mathbf{k},\varepsilon)B(\mathbf{k},\varepsilon)\right),$$

dass $[Q, J^\mu(x)] = 0$. Daher gilt für Eigenvektoren Φ_1 und Φ_2 von Q zu verschiedenen Eigenwerten, dass $\langle\Phi_1, J^\mu(x)\Phi_2\rangle = 0$. Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$[Q, \Psi(x)] = -\Psi(x), \quad \left[Q, \overline{\Psi}(x)\right] = \overline{\Psi}(x)$$

und benützen Sie dann Schwingers Formel aus Bsp.2).

5. **Lokale Stromerhaltung:** Kontrollieren Sie an den Matrixelementen von Bsp.3), dass $\partial_\mu J^\mu = 0$.