11. Übungen zu Quantentheorie II / 14. Jänner 2003/ GG

Klein - Gordon Quantenfeld

1. **Energie - Impuls:** Sei ϕ eine Lösung der Klein - Gordon Gleichung mit Spektralamplitude $a \in \mathcal{S}(V_0 : \mathbb{C})$. Zeigen Sie, für den Energie - Impulsvektor P

$$P = \int_{V_0} d\mu k_\kappa \left| a\left(\mathbf{k}\right)\right|^2 .$$

2. **Bosonischer Fock Raum:**

   (a) Zeigen Sie mit den Definitionen der Vorlesung, dass

$$\begin{aligned} & \left\langle A\left(\mathbf{k}_1\right)^* ... A\left(\mathbf{k}_n\right)^* \Omega, A\left(\mathbf{k}_1'\right)^* ... A\left(\mathbf{k}_m'\right)^* \Omega \right\rangle \\ = \quad & \delta_{n,m} \cdot 2\overline{\omega}\left(\mathbf{k}_1\right)..2\overline{\omega}\left(\mathbf{k}_n\right) \cdot \sum_{\pi \in S_n} \delta^3\left(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_{\pi(1)}\right) ... \delta^3\left(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}'_{\pi(n)}\right). \end{aligned}$$

   S_n bezeichnet die Menge der Permutationen von $\{1, .., n\}$.

   (b) Leiten Sie aus a) für den Vektor

$$(f)_n := \int_{V_0 \times ... \times V_0} d\mu_1 .. d\mu_n \frac{f(\mathbf{k}_1, ..\mathbf{k}_n)}{\sqrt{n!}} A\left(\mathbf{k}_1\right)^* ... A\left(\mathbf{k}_n\right)^* \Omega$$

   mit

$$f \in \left(L^2\left(\left(V_0\right)^n : \mathbb{C}; d\mu^n\right)\right)_{sym}$$

   ab, dass

$$\|(f)_n\|^2 = \int_{V_0 \times ... \times V_0} d\mu_1 .. d\mu_n \left| f(\mathbf{k}_1, ..\mathbf{k}_n)\right|^2 .$$

   (c) Leiten Sie aus b) (mit der Polarisierungsformel) ab, dass

$$\langle (f)_n, (g)_m \rangle = \delta_{n,m} \int_{V_0 \times ... \times V_0} d\mu_1 .. d\mu_n \overline{f(\mathbf{k}_1, ..\mathbf{k}_n)} g(\mathbf{k}_1, ..\mathbf{k}_n).$$

   (d) Zeigen Sie für den Energie - Impulsvektoroperator P und $f \in \left(\mathcal{S}\left(\left(V_0\right)^n : \mathbb{C}\right)\right)_{sym}$

$$\langle (f)_n, P(f)_n \rangle = \hbar \int_{V_0 \times ... \times V_0} d\mu_1 .. d\mu_n \left| f(\mathbf{k}_1, ..\mathbf{k}_n)\right|^2 \sum_{i=1}^n \left(k_i\right)_\kappa .$$

3. **Feynmanpropagator:** Zeigen Sie für Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Feldproduktes

$$\langle \Omega, T\left(\Phi(x), \Phi(y)\right) \Omega \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{i}{\left(2\pi\right)^4} \int_V d^4k \frac{e^{-i\langle k, x-y\rangle}}{\langle k, k\rangle - \kappa^2 + i\varepsilon}.$$