10. Übungen zu Quantentheorie II / 7. Jänner 2003/ GG

Streuung relativistischer Elektronen an schweren Kernen, Mottformel

1. **Relativistischer Streuquerschnitt:** Der (spinaufgelöste) differentielle Streuquerschnitt zum Positivenergieraum eines Diracstreupaars $H_0 = \hbar c \left(-i\gamma^0 \sum_{l=1}^{3} \gamma^l \partial_l + \kappa\gamma^0\right)$, $H_0 + H'$ ist mittels einer Folge $\Phi = \left(\phi_{\varepsilon,N}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ von Einheitsvektoren

$$\phi_{\varepsilon,N}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k'}{2\overline{\omega}(\mathbf{k}')} a_N(\mathbf{k}') u\left(\mathbf{k}',\varepsilon\right) \frac{\exp(i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x})}{(2\pi)^{3/2}} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k'}{2\overline{\omega}(\mathbf{k}')} a_N(\mathbf{k}') U_{\mathbf{k}',\varepsilon'}(\mathbf{x}),$$

deren Wellenzahlamplituden a_N Träger in einer Kugel vom Radius K/N um $\mathbf{k}$ haben, wie folgt definiert

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{k},\varepsilon}(\mathbf{n},\varepsilon') := \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbf{k}^\perp} d^2b \int_0^\infty \lambda^2 \frac{d\lambda}{2\overline{\omega}(\lambda\mathbf{n})} \left|\left\langle U_{\lambda\mathbf{n},\varepsilon'}, S e^{i\mathbf{b}\cdot\mathbf{K}} \phi_{\varepsilon,N}\right\rangle\right|^2.$$

Hier ist $\{u\left(\mathbf{k}',\varepsilon\right) : \epsilon = \pm 1\}$ eine Basis[1] des Raumes $\Pi_+^{\mathbf{k}'}\left(\mathbb{C}^4\right)$ mit $\overline{u}\left(\mathbf{k}',\varepsilon\right)\gamma^0 u\left(\mathbf{k}',\varepsilon'\right) = 2\overline{\omega}(\mathbf{k}')\delta_{\varepsilon,\varepsilon'}$. Der Streuoperator ist $S = \Omega_{out}^*\Omega_{in}$. Die Streuamplitude wird im relativistischen Fall so definiert, dass

$$\langle U_{\mathbf{k}',\varepsilon'}, S U_{\mathbf{k},\varepsilon}\rangle = 2\overline{\omega}(\mathbf{k})\delta^3\left(\mathbf{k}'-\mathbf{k}\right)\delta_{\varepsilon',\varepsilon} - 2\pi i \delta\left(\overline{\omega}(\mathbf{k}') - \overline{\omega}(\mathbf{k})\right) T\left(\mathbf{k}',\varepsilon';\mathbf{k},\boldsymbol{\varepsilon}\right).$$

Es gilt also $T\left(\mathbf{k}',\varepsilon';\mathbf{k},\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \left\langle U_{\mathbf{k}',\varepsilon'}, \frac{1}{\hbar c} H'\Omega_{in} U_{\mathbf{k},\varepsilon}\right\rangle$. Zeigen Sie

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{k},\varepsilon}(\mathbf{n},\varepsilon') = \left(2\pi^2\right)^2 \left|T\left(|\mathbf{k}|\,\mathbf{n},\varepsilon';\mathbf{k},\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right|^2.$$

2. **Mottformel:** Sei nun H' der Multiplikationsoperator mit der auf $\mathbb{R}^3\backslash 0$ definierten reellen Funktion $\mathbf{x} \mapsto v\frac{e^{-\mu|\mathbf{x}|}}{4\pi\mu|\mathbf{x}|}$ mit $v \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$.[2]

   (a) Zeigen Sie mit $\mathbf{k}' := |\mathbf{k}|\,\mathbf{n}$, $q := |\mathbf{k}'-\mathbf{k}| = 2\,|\mathbf{k}|\sin(\theta/2)$ und $\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2\cos\theta$, dass in Bornapproximation mit der dimensionslosen Potentialkonstante $C' := \frac{v}{4\pi\mu\hbar c}$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{k},\varepsilon}^B(\mathbf{n},\varepsilon') = \left(\frac{C'}{q^2+\mu^2}\right)^2 \left|\overline{u}\left(\mathbf{k}',\varepsilon'\right)\gamma^0 u\left(\mathbf{k},\varepsilon\right)\right|^2.$$

   (b) Zeigen Sie für den "spingemittelten" diff Streuquerschnitt $\left\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\right\rangle_{\mathbf{k}}(\mathbf{n}) := \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon,\varepsilon'}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{k},\varepsilon}(\mathbf{n},\varepsilon')$, dass in Bornapproximation

$$\left\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\right\rangle_{\mathbf{k}}^B(\mathbf{n}) = \left(\frac{2C'\overline{\omega}(\mathbf{k})}{q^2+\mu^2}\right)^2\left(1-\left(\frac{q}{2\overline{\omega}(\mathbf{k})}\right)^2\right).$$

   Im Grenzfall $\mu, v \to 0$ bei festem $C' = -Z\alpha$ ergibt das mit $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ und $\kappa = mc/\hbar$ die Mottformel

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\right\rangle_{\mathbf{k}}^M(\mathbf{n}) \quad : \quad &= \lim_{\mu,v\to 0, C'=-Z\alpha}\left\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\right\rangle_{\mathbf{k}}^B(\mathbf{n}) \\ &= (Z\alpha)^2\left(\frac{\hbar}{2\,|\mathbf{p}|}\right)^2\frac{(mc)^2+|\mathbf{p}|^2\cos^2(\theta/2)}{|\mathbf{p}|^2\sin^4(\theta/2)}.\end{aligned}$$

   (c) Zeigen Sie für den Rutherfordquerschnitt von Übg 1)

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\right\rangle_{\mathbf{p}}^R(\mathbf{n}) &= (Z\alpha)^2\left(\frac{\hbar}{2\,|\mathbf{p}|}\right)^2\frac{(mc)^2}{|\mathbf{p}|^2\sin^4(\theta/2)}, \\ \left\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\right\rangle_{\mathbf{k}}^M(\mathbf{n}) &= \left\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\right\rangle_{\hbar\mathbf{k}}^R(\mathbf{n})\left[1+\left(\frac{|\mathbf{k}|}{\kappa}\cos(\theta/2)\right)^2\right].\end{aligned}$$

[1] Siehe Übung 9, Bsp 1.

[2] Das Coulombpotential für ein Elektron im Feld eines Atomkerns der Ordnungszahl Z ergibt sich daraus im Grenzfall $\mu \to 0$ und $v \to 0$ bei festem Wert $v/4\pi\mu = -Ze^2/4\pi\varepsilon_0 = -\hbar c Z\alpha$ (Hier ist $\alpha := \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$ die Sommerfeld-Feinstrukturkonstante.)