1. Übungen zu Quantentheorie II / 8. & 15. Oktober 2002/ GG

Newtonsche Mechanik: Differentieller Streuquerschnitt, Rutherfordstreuformel

1. Ein Newtonscher Massenpunkt $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit Masse m streut am Zentralpotential
$$V : \mathbb{R}^3 \backslash 0 \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto C/|\mathbf{x}|.$$
$C \in \mathbb{R}$. Für den Betrag ρ des Stoßparameters[1] (der einlaufenden Asymptote mit dem Impuls $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$) und für den Streuwinkel[2] Θ gilt
$$\rho = f(\Theta) := \frac{m\,|C|}{|\mathbf{p}|^2} \cot\left(\frac{\Theta}{2}\right).$$

   (a) Für den differentiellen Streuquerschnitt $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{p}}$ bei einlaufendem Impuls $\mathbf{p}$ gilt
   $$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{p}} (\mathbf{n}) = \frac{\rho}{\sin(\Theta)} \left|f'(\Theta)\right| \quad \text{auf } S^2 \backslash \left\{\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, -\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right\} \text{ mit } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}'|}.$$
   Leiten Sie daraus mit $E_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|^2/(2m)$ die *Rutherfordstreuformel* auf $S^2 \backslash \left\{\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right\}$ ab:
   $$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{p}} (\mathbf{n}) = \left(\frac{C}{4E_{\mathbf{p}}}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)}.$$
   Überprüfen Sie für das Gebiet $\Delta_\theta = \left\{\mathbf{n} \in S^2 \mid \Theta > \theta\right\}$ mit $0 < \theta < \pi$
   $$\sigma_{\mathbf{p}}(\theta) := \int_{\Delta_\theta} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{p}} (\mathbf{n})\, d\Omega = \pi f(\theta)^2 = \pi \left(\frac{C}{2E_{\mathbf{p}}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - 1\right)$$

   (b) Ein α-Teilchen streut mit der Einschussenergie $E_{\mathbf{p}} = 5\,\mathrm{MeV}$ an einem Goldkern. Skizzieren Sie den Grafen der entsprechenden Funktion f^{-1} im Bereich $1\,\mathrm{fm} < \rho < 10\,\mathrm{fm}$ und skizzieren Sie im zugehörigen Winkelbereich den Grafen von $\Theta \mapsto \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{p}} (\mathbf{n})$. Welchen Wert hat das Integral von $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{p}}$ über jenen Bereich der S^2, in den der Stoßparameterbereich $B_0 \subset B$ mit $1\,\mathrm{fm} < \rho < 10\,\mathrm{fm}$ streut. Sei nun $B_1 \subset B$ der Stoßparameterbereich mit $\rho < 0.1\,\mathrm{nm}$. B_1 enthält also ungefähr jene einlaufenden Asymptoten, die in das Innere eines Goldatoms zielen und am Coulombpotential um den Goldkern streuen.[3] Sei $B_2 \subset B$ der Bereich, der mit $\Theta > 5°$ streut. Zeigen Sie $B_2 \subset B_1$ und berechnen Sie $|B_2| / |B_1|$.

   (c) Ein Strahl aus α-Teilchen (mit einer makroskopischen Querschnittsfläche F) trifft (senkrecht) auf eine Goldfolie der Dicke $\delta = 10\,\mu\mathrm{m}$. (Die Massendichte der Folie ist $\rho = 19{,}3 \times 10^3\,\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$.) Der Strahl enthält $N_\alpha = 10^6$ Teilchen. Für wieviele α-Teilchen N' ist $\Theta > 5°$ zu erwarten? *Hinweis:* Im Strahlquerschnitt liegen $N_T := \rho F \delta / M_{Au}$ Goldatome (der Masse M_{Au}). Ist $a := F/N_T = M_{Au}/\rho\delta \gg \sigma_{\mathbf{p}}(5°)$, dann streut ein α-Teilchen an höchstens einem Goldatom mit $\Theta > 5°$ und die Stoßparameter sind in einer kreisförmigen Fläche (vom Maß a) um das "jeweils am stärksten streuende" Goldatom gleichverteilt. Dann gilt
   $$N' = N_\alpha \frac{\sigma_{\mathbf{p}}(5°)}{a} = N_\alpha \frac{\rho\delta}{M_{Au}} \sigma_{\mathbf{p}}(5°).$$
   Merke also die Faustregel (begrenzter Gültigkeit[4])
   $$N_\Delta = \frac{N_{\mathrm{Beam}} N_{\mathrm{Target}}}{F} \sigma_\Delta.$$
   N_{Beam}...Zahl der Strahlteilchen, N_{Target}...Zahl Targetteilchen innerhalb des Strahlquerschnitts, F...Flächenmaß des Strahlquerschnitts, σ_Δ... Streuquerschnitt in den gegebenen Bereich $\Delta \subset S^2$. N_Δ...Zahl der in Δ gestreuten Teilchen.

[1] Gilt für die einlaufende Asymptote $\boldsymbol{\gamma}_-(t) = \boldsymbol{\xi} + \frac{t}{m}\mathbf{p}$, dann heißt $\boldsymbol{\xi} - \frac{\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$ Stoßparameter; das orthogonale Komplement von $\mathbb{R}\cdot\mathbf{p}$ heißt Stoßparameterebene B.

[2] Ist $\mathbf{p}$ bzw. $\mathbf{p}'$ der Impuls der ein- bzw. auslaufenden Asymptote, dann ist der Streuwinkel $\Theta \in [0,\pi]$ durch $|\mathbf{p}|\,|\mathbf{p}'|\cos(\Theta) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'$ definiert.

[3] Die Streuung an der Elektronenhülle ist unter den gegebenen Umständen vernachlässigbar.

[4] Ist die Foliendicke δ so groß, dass $\sigma_{\mathbf{p}}(5°) > a$, dann ist wegen $N' > N_\alpha$ die Formel sicher falsch.

2. Ein Newtonscher Massenpunkt streut an einer unverrückbaren, elastisch reflektierenden Kugel mit dem Radius R. Zeigen Sie für den differentiellen Streuquerschnitt auf S^2, dass $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{p}} = R^2/4$. Kontrollieren Sie diese Formel mithilfe des totalen Wirkungsquerschnitts $\sigma_{\mathbf{p}} = \int_{S^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{p}} d\Omega$. Wie groß ist der Streuquerschnitt in die Halbkugel, in der für den Streuwinkel Θ gilt: $0 < \Theta < \pi/2$?

3. Ein Newtonscher Massenpunkt streut an einem allgemeinen Potential. Stoßparameterbetrag und -azimuth seien mit (ρ, ϕ) bezeichnet; Streuwinkel und auslaufender Azimuth mit (Θ, Φ).[5] Die Funktion F, für die $F \circ (\Theta, \Phi) = (\rho, \phi)$ (bei fest gewähltem einlaufenden Impuls und mit maximalem Definitionsbereich) gilt, sei differenzierbar. J sie die Matrix der partiellen Ableitungen von F. Leiten Sie aus der in der Vorlesung gegeben Definition von $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ab, dass

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{\sin(\Theta)} \left|\det(J)\right|.$$

[5] (ρ, ϕ) wird als lokale Karte der Stoßparameterebene und (Θ, Φ) als lokale Karte der Sphäre auslaufender Impulsrichtungen aufgefasst.