

1 Quantenelektrodynamik

Gebhard Gröbl
 Institut für Theoretische Physik, Universität Innsbruck
 Notizen zu Quantentheorie II, WS 02/03

1.1 Elektromagnetische Potentialfelder

Sei V ein reeller Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei ein inneres Produkt von V und $\underline{e} = (e_0, \dots, e_3)$ eine Basis von V mit $\langle e_\mu, e_\nu \rangle = \eta_{\mu,\nu}$. Für $x \in V$ wird notiert $x = x^\mu e_\mu$. (Gelegentlich wird (x^μ) als Karte von V aufgefasst.) Der UVR V_0 ist die lineare Hülle von (e_1, e_2, e_3) . Die Einschränkung von $-\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $V_0 \times V_0$ ist ein Skalarprodukt. Die zugehörige Norm wird mit $|\cdot|$ bezeichnet. Es wird für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_0$ notiert $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Der affine Unterraum $V_\tau := V_0 + \tau e_0$ ist ein Raum gleichzeitiger Ereignisse.

Sei F eine 2-Form auf V mit $dF = 0$. Die Feldstärkeform F hat bezüglich der Karte (x^μ) die Zerlegung

$$F = \sum_{i=1}^3 E^i dx^0 \wedge dx^i - cB^1 dx^2 \wedge dx^3 + cB^2 dx^1 \wedge dx^3 - cB^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Die Tangentenvektorfelder auf V_0

$$\mathbf{E}_\tau(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^3 E^i (\tau e_0 + \mathbf{x}) e_i, \quad \mathbf{B}_\tau(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^3 B^i (\tau e_0 + \mathbf{x}) e_i$$

sind das elektrische und magnetische Feld der Feldstärkeform F in Bezug auf das Inertialsystem \underline{e} zur Zeit $t = \tau/c$. Die physikalische Dimension von \mathbf{E}_τ und $c\mathbf{B}_\tau$ ist die von Energie/(Ladung \times Länge). Man schreibt $[\mathbf{E}] = [c\mathbf{B}] = [\frac{\hbar c}{eL^2}]$. Die (positive) Konstante e bezeichnet die Elementarladung und L irgendeine Länge. Die Variable τ wird als Parameter und nicht als Koordinatenfunktion aufgefasst. Es gelten die homogenen Maxwellgleichungen im Sinn der Vektoranalysis auf V_0 zur euklidischen Struktur von $-\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}_\tau) = 0, \quad \operatorname{rot}(\mathbf{E}_\tau) + \frac{\partial(c\mathbf{B}_\tau)}{\partial\tau} = 0.$$

Wegen $dF = 0$ existiert eine 1-Form $A = A_\mu dx^\mu$ auf V mit $F = dA$. Bezüglich des Inertialsystems \underline{e} definiert A eine τ -parametrisierte Schar von Skalar- und Vektorpotentialen

$$\phi_\tau(\mathbf{x}) = A_0(\tau e_0 + \mathbf{x}), \quad \mathbf{A}_\tau(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^3 A_i(\tau e_0 + \mathbf{x}) e_i.$$

Es gilt

$$\mathbf{E}_\tau = -\frac{\partial(\mathbf{A}_\tau)}{\partial\tau} - \operatorname{grad}(\phi_\tau), \quad c\mathbf{B}_\tau = \operatorname{rot}(\mathbf{A}_\tau).$$

Die physikalische Dimension der Potentiale ist $[A_\mu] = [\phi_\tau] = [\mathbf{A}_\tau] = [\frac{\hbar c}{eL}]$.

Die Energie eines freien elektromagnetischen Feldes, dh es gilt $d * F = 0$, ist mit der elektrischen Feldkonstante ε_0 und der magnetischen Feldkonstante μ_0 durch

$$E = \int_{V_0} d^3x \frac{1}{2} (\varepsilon_0 |\mathbf{E}_\tau|^2 + \mu_0^{-1} |\mathbf{B}_\tau|^2) = \int_{V_0} d^3x \frac{\varepsilon_0}{2} (|\mathbf{E}_\tau|^2 + |c\mathbf{B}_\tau|^2)$$

gegeben. (Beachte $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$.) Im Hinblick auf die Quantisierung von F ist die Größe $K := E/(\hbar c)$ die klassische Vorstufe des Zeittranslationsgenerators. K drückt sich durch das umskalierte Potentialfeld $\widehat{A} := \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\hbar c}} A$ parameterfrei aus

$$K = \int_{V_0} d^3x \frac{1}{2} \left(\left| \partial_\tau \widehat{\mathbf{A}}_\tau + \operatorname{grad}(\widehat{\phi}_\tau) \right|^2 + \left| \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{A}}_\tau \right|^2 \right). \quad (1)$$

Es gilt $[\widehat{A}_\mu] = 1/L$.

1.2 Das Diracquantenfeld im äußeren Potential

Die Einführung eines äußeren elektromagnetischen Potentials in die Diracgleichung geschieht mithilfe der minimalen Kopplungsregel für ein Teilchen der (SI-dimensionierten) elektrischen Ladung $q \in \mathbb{R}$. Die Regel ist: *Ersetze im Kartenausdruck der Diracgleichung zur Karte (x^μ) die partiellen Ableitungen $\partial_\mu \psi$ durch $(\partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu) \psi$.* Damit ergibt sich die partielle Differentialgleichung für Funktionen $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}^{4 \times 1}$

$$i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu \right) \psi - \kappa\psi = 0. \quad (2)$$

Beachte $[\frac{q}{\hbar c}A_\mu] = 1/L$. Für die τ -parametrisierte Familie von zugehörigen Diracoperatoren H_τ mit $i\hbar c \partial_\tau \psi = H_\tau \psi_\tau$ gilt somit

$$h_\tau^A := \frac{1}{\hbar c} H_\tau^A = -i\gamma^0 \sum_{l=1}^3 \gamma^l \left(\partial_l + i\frac{q}{\hbar c}A_l \right) + \kappa\gamma^0 + \frac{q}{\hbar c}A_0.$$

Der ("zweitquantisierte") Hamiltonoperator $\widehat{H} = \hbar c K_0$ des freien Diracquantenfeldes ψ erfüllt mit der normalgeordneten Energiedichte $(K_{00})_N$ und dem parameterreduzierten Feld $\Psi := \psi/\sqrt{\hbar}$ und $h_0 = -i\gamma^0 \sum_{l=1}^3 \gamma^l \partial_l + \kappa\gamma^0$

$$\widehat{H} = c\widehat{P}_0 = c \int_{V_0} d^3x (K_{00})_N = c \int_{V_0} d^3x (\overline{\psi} \gamma^0 i \partial_0 \psi)_N = \hbar c \int_{V_0} d^3x (\overline{\Psi} \gamma^0 h_0 \Psi)_N.$$

Die Normalordnung eines Produktes von freien Diracquantenfeldern ist über die Zerlegung $\Psi(x) = A(x) + B^*(x)$ in den Vernichtungs- und Erzeugungsteil

$$\begin{aligned} A(x) &:= \sum_\varepsilon \int_{V_0} \frac{d^3k}{2\overline{\omega}(\mathbf{k})} A(\mathbf{k}, \varepsilon) U(\mathbf{k}, \varepsilon)(x), & \overline{A}(x) &:= \sum_\varepsilon \int_{V_0} \frac{d^3k}{2\overline{\omega}(\mathbf{k})} A(\mathbf{k}, \varepsilon)^* \overline{U}(\mathbf{k}, \varepsilon)(x) \\ B^*(x) &:= \sum_\varepsilon \int_{V_0} \frac{d^3k}{2\overline{\omega}(\mathbf{k})} B(\mathbf{k}, \varepsilon)^* V(\mathbf{k}, \varepsilon)(x), & \overline{B}^*(x) &:= \sum_\varepsilon \int_{V_0} \frac{d^3k}{2\overline{\omega}(\mathbf{k})} B(\mathbf{k}, \varepsilon) \overline{V}(\mathbf{k}, \varepsilon)(x) \end{aligned}$$

definiert

$$(\overline{\Psi}_\alpha(x) \Psi_\beta(y))_N = \overline{A}_\alpha(x) A_\beta(y) + \overline{B}^*_\alpha(x) A_\beta(y) + \overline{A}_\alpha(x) B_\beta^*(y) - B_\beta(y) \overline{B}_\alpha(x).$$

Merke: Alle Vernichter vor den Erzeugern wirken lassen; für jede dazu nötige Vertauschung einen Faktor (-1) anbringen. Wegen der Antikommutatorquantisierungsrelationen unterscheidet sich $\overline{\Psi}_\alpha(x) \Psi_\beta(y)$ von $(\overline{\Psi}_\alpha(x) \Psi_\beta(y))_N$ nur um ein Vielfaches der Identität. Für $x = y$ ist das Produkt $\overline{\Psi}_\alpha(x) \Psi_\beta(x)$ nicht definiert, das normalgeordnete Produkt jedoch schon.

Es gilt

$$e^{i\widehat{H}t/\hbar} \Psi(x) e^{-i\widehat{H}t/\hbar} = \Psi(x + ct e_0).$$

Damit ist es naheliegend, die τ -parametrisierte Schar von Hamiltonoperatoren \widehat{H}_τ^A eines Externfeldproblems im Fockraum des freien Diracquantenfeldes Ψ mit

$$\widehat{H}_\tau^A := \hbar c \int_{V_0} d^3x (\overline{\Psi} \gamma^0 h_\tau^A \Psi)_N = \widehat{H} + q \int_{V_0} d^3x A_\mu (\tau e_0 + \mathbf{x}) (\overline{\Psi}(\mathbf{x}) \gamma^\mu \Psi(\mathbf{x}))_N =: \widehat{H} + V_\tau \quad (3)$$

versuchsweise zu definieren. Problem: Der formale Ausdruck V_τ erzeugt im allgemeinen zwar eine quadratische Form im Fockraum, jedoch keinen Operator. Wir ignorieren das und fahren fort mit der Heuristik.

Der Streuoperator der Dynamik $\left\{ \widehat{H}_\tau^A \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ zur Asymptotik $\exp(-i\widehat{H}t/\hbar)$ ist somit durch die formale, zeitgeordnete Dysonreihe mit dem zeitabhängigen Potential im Heisenbergbild des freien Diracquantenfeldes

$$(V_\tau)_0 := \exp(i\widehat{H}\tau/\hbar) V_\tau \exp(-i\widehat{H}\tau/\hbar)$$

gegeben:

$$S = T \exp \left(-\frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (V_\tau)_0 \right) = T \exp \left(-\frac{iq}{\hbar c} \int_V d^4x A_\mu(x) (\overline{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x))_N \right).$$

Die "Verschmierung" des normalgeordneten Stromquantenfeldes $J = J^\mu e_\mu$ des freien Diracquantenfeldes mit dem externen Potential A bestimmt die Wechselwirkung. Es gilt

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= (\overline{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x))_N = S_e^\mu(x) + P_E^\mu(x) + P_V^\mu(x) + S_{\bar{e}}^\mu(x), \\ S_e^\mu(x) &:= \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \int_{V_0 \times V_0} d\mu_1 d\mu_2 A(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)^* A(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2) (\overline{U_{\mathbf{k}_1, \varepsilon_1}} \gamma^\mu U_{\mathbf{k}_2, \varepsilon_2})(x), \\ P_E^\mu(x) &:= \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \int_{V_0 \times V_0} d\mu_1 d\mu_2 A(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)^* B(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2)^* (\overline{U_{\mathbf{k}_1, \varepsilon_1}} \gamma^\mu V_{\mathbf{k}_2, \varepsilon_2})(x), \\ P_V^\mu(x) &:= \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \int_{V_0 \times V_0} d\mu_1 d\mu_2 B(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1) A(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2) (\overline{V_{\mathbf{k}_1, \varepsilon_1}} \gamma^\mu U_{\mathbf{k}_2, \varepsilon_2})(x), \\ S_{\bar{e}}^\mu(x) &:= - \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \int_{V_0 \times V_0} d\mu_1 d\mu_2 B(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2)^* B(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1) (\overline{V_{\mathbf{k}_1, \varepsilon_1}} \gamma^\mu V_{\mathbf{k}_2, \varepsilon_2})(x). \end{aligned}$$

In der Ordnung $\frac{q}{\hbar c}$ der Störungsreihe von S ergeben die vier Summanden von J^μ der Reihe nach Beiträge zu: Teilchenstreuung, Paarerzeugung, Paarvernichtung, Antiteilchenstreuung. Der von der fermionischen Normalordnung eingebrachte Faktor -1 am Antiteilchenstreuterm ist für den Vorzeichenunterschied der elektrischen Kopplung von Teilchen und Antiteilchen an ein äußeres Potential verantwortlich.

Die hier angedeutet Formulierung des Externfeldproblems für das Diracquantenfeld ist nicht mathematisch wohldefiniert, sie dient nur dazu, die Motivation für die Definition der QED zu liefern. Ein Diracquantenfeld das die Bewegungsgleichung (2) löst, lässt sich mit mathematisch rigorosen Methoden für große Potentialklassen konstruieren.¹

1.3 QED: Dysonreihe

Die Quantenelektrodynamik (QED) stützt sich auf die Bildung eines zeitunabhängigen(!) Gesamthamiltonoperators H im Hilbertraum eines wechselwirkungsfreien Elektron/Positron - Photonen Systems. Dies geschieht so: Ersetze für alle $\tau \in R$ die jeweils vorgegebene Potentialform A_τ im fermionischen Hamiltonoperator H_τ^A durch die $x^0 = 0$ -Restriktion eines wechselwirkungsfreien Potentialquantenfeldes $\mathcal{A}(x)$ mit dem Hilbertraum \mathcal{H}_γ . Natürlich ist damit auch der Hilbertraum zu vergrößern. Der fermionische Raum \mathcal{H}_f wird durch ein Tensorprodukt $\mathcal{H} := \mathcal{H}_\gamma \otimes \mathcal{H}_f$ ersetzt. Wird zum dadurch entstehenden zeitunabhängigen Hamiltonoperator noch eine Quantenversion der freien Feldenergie von \mathcal{A} addiert, so entsteht ein Hamiltonoperator des Typs $H := H_\gamma \otimes id_f + id_\gamma \otimes H_f + H_{int}$. Für den Wechselwirkungsteil des formalen Gesamthamiltonoperators gilt

$$H_{int} = q \int_{V_0} d^3x \mathcal{A}_\mu(\mathbf{x}) \otimes (\overline{\Psi}(\mathbf{x}) \gamma^\mu \Psi(\mathbf{x}))_N$$

Dadurch wird versucht, die Rückwirkung der geladenen Materie auf das Strahlungsfeld zu erfassen.

Für die Heisenbergfelder zur vollen Dynamik

$$\mathcal{A}_{int}(tce_0 + \mathbf{x}) := e^{iHt/\hbar} (\mathcal{A}(\mathbf{x}) \otimes id_f) e^{-iHt/\hbar}, \quad \Psi_{int}(tce_0 + \mathbf{x}) := e^{iHt/\hbar} (id_\gamma \otimes \Psi(\mathbf{x})) e^{-iHt/\hbar}$$

gelten formal die (Gupta-Bleuler modifizierten) nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen des Maxwell-Dirac Systems mit den Anfangsbedingung $\mathcal{A}_{int}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \otimes id_f$ und $\Psi_{int}(\mathbf{x}) = id_\gamma \otimes \Psi(\mathbf{x})$

$$\left(i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} \mathcal{A}_{int} \right) - \kappa \right) \Psi_{int} = 0, \quad \square \mathcal{A}_{int} = \frac{q}{\varepsilon_0} \overline{\Psi}_{int} \gamma^\mu \Psi_{int}.$$

Die Heisenbergfelder \mathcal{A}_{int} und Ψ_{int} zur vollen Dynamik H und die Heisenbergfelder $\mathcal{A} \otimes id_f$ und $(id_\gamma \otimes \Psi)$ zur freien Dynamik gehen auseinander formal durch ein unitäres Wechselwirkungsbild hervor.²

Das Feld \mathcal{A} ist eine Quantisierung des freien elektromagnetischen Potentialfeldes. Hier gibt es viele Möglichkeiten, die meist als Eichungen bezeichnet werden. Zur Parameterreduktion ist es nützlich, anstelle des physikalisch dimensionierten Potentialfeldes \mathcal{A} das parameterreduzierte Feld

$$\hat{A}_\mu := \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\hbar c}} \mathcal{A}_\mu$$

¹Hier einige Beispiele: A Z Capri, *Electron in a given time-dependent electromagnetic field*, Journ math Phys 10 (1969) 575 - 580; S N M Ruijsenaars, *Charged particles in external fields*, Commun math Phys 52 (1977) 267 - 294; G Nenciu, G Scharf, *On regular external fields in quantum electrodynamics*, Helv Phys Acta 51 (1978) 412 - 424; G Grübl, C Reitberger, *Fermion number creation via electromagnetism*, Lett math Phys 26 (1992) 235 - 243; Lehrbücher: B Thaller, *The Dirac equation*, Springer, 1992; G Scharf, *Finite Quantum Electrodynamics*, Springer, 1995.

²Haags Theorem sagt, dass diese erhoffte Struktur nicht zu verwirklichen ist. Es scheint jedoch bisher keine andere Heuristik zu geben, die die Definition der perturbativen QED überzeugender motivieren würde.

zu benützen. Eine Eichung \widehat{A} wird hier nicht explizit ausgebreitet; benötigen werden wir nur

$$\left\langle \Omega_\gamma, \widehat{A}_\mu(x) \Omega_\gamma \right\rangle_{\mathcal{H}_\gamma} = 0$$

und die (bosonisch) zeitgeordnete 2-Punktfunktion der Gupta - Bleuler Eichung³:

$$\begin{aligned} \left\langle \Omega_\gamma, T \left(\widehat{A}_\mu(x) \widehat{A}_\nu(y) \right) \Omega_\gamma \right\rangle_{\mathcal{H}_\gamma} &= i \eta_{\mu,\nu} \Delta_F^0(x-y), \\ \Delta_F^0(x) &= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_V d^4k \frac{\exp(-i \langle k, x \rangle)}{\langle k, k \rangle + i\varepsilon} = - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^2 (\langle x, x \rangle - i\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Die Distribution Δ_F^0 ist der $\kappa \rightarrow 0$ Limes des Feynmanpropagators Δ_F des Klein - Gordon Quantenfeldes. Die zeitgeordnete 2-Punktfunktion macht die Dimension von \widehat{A}_μ offensichtlich.

Die zeitgeordnete 2-Punktfunktion einer anderen Eichung unterscheidet sich im allgemeinen von der oben angegebenen. Die observablen Aussagen der Theorie erweisen sich jedoch als unabhängig von der Eichung, was durchaus nicht selbstverständlich ist.

Der Ausgangspunkt der QED für das Elektron/Positron - Photon System ist die formale Dysonreihe des Streuoperators für $q = -e$ und Massenparameter $\kappa = \frac{m_e c}{\hbar}$ des freien Diracquantenfeldes Ψ . Sie ist mit dem dimensionslosen Ladungsparameter $e_0 := \frac{e}{\sqrt{\varepsilon_0 \hbar c}} = \sqrt{4\pi\alpha}$ auf $\mathcal{H}_\gamma \otimes \mathcal{H}_f$ durch

$$S = T \exp \left(i e_0 \int_V d^4x \widehat{A}_\mu(x) \otimes (\overline{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x))_N \right). \quad (4)$$

gegeben. Die Konstante $e_0 = \sqrt{4\pi\alpha}$ mit der Sommerfeld-Feinstrukturkonstante $\alpha := \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$ regelt die Stärke der Wechselwirkung.

Warum ist die Dysonreihe nur formal? Bereits der Versuch den Vakuumerwartungswert von S in der Ordnung e_0^2 zu berechnen, führt auf Ausdrücke des Typs

$$\int_{V \times V} d^4x d^4y \eta_{\mu,\nu} \Delta_F^0(x-y) Sp(S_F(x-y) \gamma^\mu S_F(y-x) \gamma^\nu).$$

(Vakuublase) Solche Distributionsprodukte (und viele weitere in der Störungsreihe versteckte) existieren nicht, was sich im Divergieren der entsprechenden Impulsraumintegrationen niederschlägt. Der Grund ist letztlich der, dass der freie Diracstrom J zu singularär ist, als dass er Zeitordnung erlauben würde. Zeitordnung von operatorwertigen Distributionen verlangt die Bildung von distributionellen Produkten des Typs $\Theta(x^0 - y^0) J_\mu(x) J_\nu(y)$. Diese existieren zwar für freie Felder, aber nicht für deren normalgeordneten Monome (Wickmonome).

Die renormierte Störungsreihe von Bogoljubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann, Epstein und Glaser besteht im Fall der QED in einem Algorithmus, endliche ("infrarot inklusive") Wirkungsquerschnitte, nicht jedoch Streumatrixelemente(!), zur Störungsreihe bis zu jeder endlichen Ordnung zu generieren. Dass dies geht, ist erstaunlich und gibt die Möglichkeit diese Theorie, mit unglaublicher Präzision, zu testen. Die renormierte Störungsreihe etabliert jedoch keinen Hamiltonoperator und auch keinen Streuoperator. Deshalb existiert bisher keine QED im Sinn konstruktiver Quantenfeldtheorie.⁴

1.4 Elastische Elektron - Positronstreuung

Als ein Beispiel zur perturbativen QED wird nun das uneigentliche (und auch undefinierte) Matrixelement

$$\langle id_\gamma \otimes (A(\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1) * B(\mathbf{k}'_2, \varepsilon'_2) *) \Omega, S(id_\gamma \otimes (A(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1) * B(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2) *)) \Omega \rangle$$

dadurch etwas konkretisiert, dass S durch die Partialsumme der Dysonreihe der Ordnung 2 ersetzt wird. D.h. für S wird der formale Ausdruck

$$S^{(2)} := id_{\mathcal{H}} + i e_0 \int_V d^4x \widehat{A}_\mu(x) \otimes J^\mu(x) + \frac{(i e_0)^2}{2!} \int_{V \times V} d^4x d^4y T \left(\widehat{A}_\mu(x) \otimes J^\mu(x), \widehat{A}_\nu(y) \otimes J^\nu(y) \right)$$

³Z.B. F Mandl, G Shaw, *Quantum field theory*, John Wiley, 1984; genaueres: F Strocchi, A S Wightman, *Proof of the charge superselection rule in local relativistic quantum field theory*, Journ math Phys 15 (1974) 2198 - 2224 (Errata: JmP 17 (1976) 1930)

⁴P J M Bongaarts, Mathematical aspects of field quantization. Quantum electrodynamics, Acta Physica Polonica B14 (1983) 347 - 385

gesetzt. Hier ist $J^\mu(x) = (\overline{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x))_N$ der Strom des freien Diracquantenfeldes und $\Omega = \Omega_\gamma \otimes \Omega_f$ mit $\|\Omega_\gamma\| = \|\Omega_f\| = 1$. Formal gilt

$$T\left(\widehat{A}_\mu(x) \otimes J^\mu(x), \widehat{A}_\nu(y) \otimes J^\nu(y)\right) = T\left(\widehat{A}_\mu(x), \widehat{A}_\nu(y)\right) \otimes T(J^\mu(x), J^\nu(y)).$$

Zum gesuchten Matricelement trägt $id_{\mathcal{H}}$ mit

$$\langle A(\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1)^* B(\mathbf{k}'_2, \varepsilon'_2)^* \Omega_f, A(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)^* B(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2)^* \Omega_f \rangle = 2\overline{\omega}(\mathbf{k}_1) \delta^3(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) \delta_{\varepsilon'_1, \varepsilon_1} 2\overline{\omega}(\mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2) \delta_{\varepsilon'_2, \varepsilon_2} \quad (5)$$

bei. Der Summand $ie_0 \int_V d^4x \widehat{A}_\mu(x) \otimes J^\mu(x)$ trägt wegen $\langle \Omega_\gamma, \widehat{A}_\mu(x) \Omega_\gamma \rangle = 0$ nicht bei. Der Summand 2. Ordnung in e_0 trägt mit

$$\frac{(ie_0)^2}{2!} \int_{V \times V} d^4x d^4y (i\eta_{\mu, \nu} \Delta_F^0(x-y)) \langle A(\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1)^* B(\mathbf{k}'_2, \varepsilon'_2)^* \Omega_f, T(J^\mu(x), J^\nu(y)) A(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)^* B(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2)^* \Omega_f \rangle$$

bei.

Zunächst berechnen wir als wohldefinierte Hilfsgröße die Distribution

$$J^{\mu, \nu}(x, y) := \langle A(\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1)^* B(\mathbf{k}'_2, \varepsilon'_2)^* \Omega_f, J^\mu(x) J^\nu(y) A(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)^* B(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2)^* \Omega_f \rangle$$

für $\mathbf{k}'_1 \neq \mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}'_2 \neq \mathbf{k}_2$. Der Strom besteht aus den Summanden

$$J^\mu(x) = P_E^\mu(x) + P_V^\mu(x) + S_e^\mu(x) + S_{\bar{e}}^\mu(x),$$

dem Paarerzeuger, Paarvernichter, Elektronstreuener und Positronstreuener. $J^\mu(x) J^\nu(y)$ enthält also 16 Summanden. Von diesen tragen nur 4 zum Matricelement bei, nämlich

$$S_e^\mu(x) S_{\bar{e}}^\nu(y) + S_{\bar{e}}^\mu(x) S_e^\nu(y) + P_E^\mu(x) P_V^\nu(y) + P_V^\mu(x) P_E^\nu(y). \quad (6)$$

Die einzigen weiteren Terme, die weder die Zahl der Elektronen noch die der Positronen ändern, sind $S_e^\mu(x) S_e^\nu(y)$ und $S_{\bar{e}}^\mu(x) S_{\bar{e}}^\nu(y)$. Ihr Beitrag verschwindet für $\mathbf{k}'_1 \neq \mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}'_2 \neq \mathbf{k}_2$.⁵ Wegen $S_e^\mu(x) S_e^\nu(y) = S_e^\nu(y) S_e^\mu(x)$ kann das Matricelement des zweiten Terms in (6) aus jenem des ersten Terms durch die Vertauschung $x \longleftrightarrow y$ und $\mu \longleftrightarrow \nu$ gewonnen werden. Analog lässt sich der Beitrag des vierten Terms aus jenem des dritten gewinnen. Das geht so. Beachte zunächst

$$P_V^\mu(x) P_E^\nu(y) = P_E^\nu(y) P_V^\mu(x) + [P_V^\mu(x), P_E^\nu(y)].$$

Der Kommutator $[P_V^\mu(x), P_E^\nu(y)]$ ist der Kommutator zweier Operatoren, die jeweils das Produkt zweier fermionischer Erzeuger bzw. Vernichter sind. Der Kommutator ist somit eine Summe von Ausdrücken des Typs "fermionischer Antikommutator mal Erzeuger mal Vernichter". Der Kommutator $[P_V^\mu(x), P_E^\nu(y)]$ trägt somit zum Matricelement für $\mathbf{k}'_1 \neq \mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}'_2 \neq \mathbf{k}_2$ nicht bei. Denn um den elektronischen und den positronischen Impuls zu ändern, werden mindestens Produkte von 4 fermionischen Operatoren benötigt.

Die Berechnung der beiden zu berechnenden Matricelemente ergibt mithilfe der Antikommutatorquantisierungsrelationen:

$$\begin{aligned} & \langle A(\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1)^* B(\mathbf{k}'_2, \varepsilon'_2)^* \Omega_f, S_e^\mu(x) S_{\bar{e}}^\nu(y) A(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)^* B(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2)^* \Omega_f \rangle = \\ & \quad - (\overline{U_{\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1}} \gamma^\mu U_{\mathbf{k}_1, \varepsilon_1})(x) (\overline{V_{\mathbf{k}_2, \varepsilon_2}} \gamma^\nu V_{\mathbf{k}'_2, \varepsilon'_2})(y), \\ & \langle A(\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1)^* B(\mathbf{k}'_2, \varepsilon'_2)^* \Omega_f, P_E^\mu(x) P_V^\nu(y) A(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)^* B(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2)^* \Omega_f \rangle = \\ & \quad (\overline{U_{\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1}} \gamma^\mu V_{\mathbf{k}'_2, \varepsilon'_2})(x) (\overline{V_{\mathbf{k}_2, \varepsilon_2}} \gamma^\nu U_{\mathbf{k}_1, \varepsilon_1})(y). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $J^{\mu, \nu}$ eine C^∞ -Funktion auf $V \times V$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} J^{\mu, \nu}(x, y) &= J_+^{\mu, \nu}(x, y) + J_+^{\nu, \mu}(y, x), \\ J_+^{\mu, \nu}(x, y) &:= (\overline{U_{\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1}} \gamma^\mu V_{\mathbf{k}'_2, \varepsilon'_2})(x) (\overline{V_{\mathbf{k}_2, \varepsilon_2}} \gamma^\nu U_{\mathbf{k}_1, \varepsilon_1})(y) - (\overline{U_{\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1}} \gamma^\mu U_{\mathbf{k}_1, \varepsilon_1})(x) (\overline{V_{\mathbf{k}_2, \varepsilon_2}} \gamma^\nu V_{\mathbf{k}'_2, \varepsilon'_2})(y). \end{aligned}$$

⁵Zum uneingeschränkten Streumatricelement 2. Ordnung würden diese Terme mit einer undefinierten Selbstenergieblase beitragen.

Beachte: $J^{\mu,\nu}(x, y) = J^{\nu,\mu}(y, x)$.⁶ Deshalb gilt für das zeitgeordnete Strommatrixelement für $\mathbf{k}'_1 \neq \mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}'_2 \neq \mathbf{k}_2$

$$\begin{aligned} J_T^{\mu,\nu}(x, y) &:= \langle A(\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1)^* B(\mathbf{k}'_2, \varepsilon'_2)^* \Omega_f, T(J^\mu(x), J^\nu(y)) A(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)^* B(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2)^* \Omega_f \rangle \\ &= \Theta(x^0 - y^0) J^{\mu,\nu}(x, y) + \Theta(y^0 - x^0) J^{\nu,\mu}(y, x) = J^{\mu,\nu}(x, y). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} J_T^{\mu,\nu}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y^\nu} J_T^{\mu,\nu}(x, y) = 0.$$

Wegen $\Delta_F^0(-x) = \Delta_F^0(x)$ folgt nun

$$\begin{aligned} & \frac{(ie_0)^2}{2!} \int_{V \times V} d^4x d^4y (i\eta_{\mu,\nu} \Delta_F^0(x-y)) J_T^{\mu,\nu}(x, y) \\ &= \frac{(ie_0)^2}{2!} 2 \int_{V \times V} d^4x d^4y (i\eta_{\mu,\nu} \Delta_F^0(x-y)) J_+^{\mu,\nu}(x, y) \\ &= ie_0^2 (2\pi)^4 \delta^4(\check{k}_1 + \check{k}_2 - \check{k}'_1 - \check{k}'_2) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\bar{u}(1') \gamma^\mu u(1)}{(2\pi)^3} \frac{\eta_{\mu,\nu}}{(\check{k}'_1 - \check{k}_1)^2 + i\varepsilon} \frac{\bar{v}(2) \gamma^\nu v(2')}{(2\pi)^3} + \\ & + \frac{\bar{u}(1') \gamma^\mu v(2')}{(2\pi)^3} \frac{\eta_{\mu,\nu}}{(\check{k}_1 + \check{k}_2)^2 + i\varepsilon} \frac{\bar{v}(2) \gamma^\nu u(1)}{(2\pi)^3} \end{aligned} \right\} \\ &=: i\delta^4(\check{k}_1 + \check{k}_2 - \check{k}'_1 - \check{k}'_2) T(\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1, \mathbf{k}'_2, \varepsilon'_2; \mathbf{k}_1, \varepsilon_1, \mathbf{k}_2, \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Beachte:

1. Da Δ_F^0 in ganz V von 0 verschieden ist, trägt $J_+^{\mu,\nu}(x-y)$ auch für raumartige $x-y$ zum Streumatrixelement bei.
2. Es gilt Gesamtenergie-Impulserhaltung. Die Größe $i\delta^4 T$ illustriert den folgenden Teil der hier (unvollständig formulierten) Feynmanschen Graphenregeln.

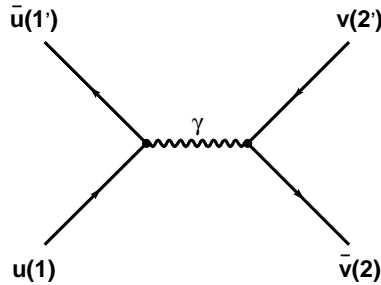


Fig 1: Impulsraum - Feynmangraph zur elastischen Elektron - Positronstreuung zum Beitrag

$$S_e^\mu(x) S_e^\nu(y) + S_e^\mu(x) S_e^\nu(y)$$

⁶Der Grund dafür ist

$$J^\mu(x) J^\nu(y) = \frac{1}{2} \{J^\mu(x), J^\nu(y)\} + \frac{1}{2} [J^\mu(x), J^\nu(y)]$$

Der Strom-Stromkommutator enthält nur $\Psi \bar{\Psi}$ Produkte (Vgl. Übungsblatt 12), die zum gegenständlichen Matrixelement nicht beitragen.

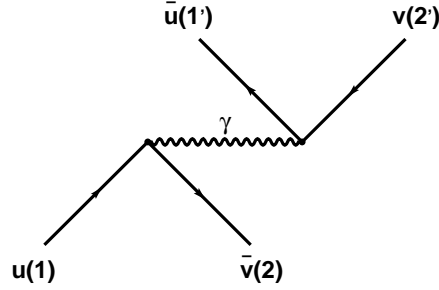


Fig 2: Impulsraum - Feynmangraph zur elastischen Elektron - Positronstreuung zum Beitrag $P_E^\mu(x)P_V^\nu(y) + P_V^\mu(x)P_E^\nu(y)$

Die Feynmanregeln im Stenogrammstil:

- Auslaufende Teilchenlinie auswärts orientieren und $(2\pi)^{-3/2} \bar{u}$, einlaufende Teilchen einwärtsorientieren und $(2\pi)^{-3/2} u$, einlaufende Antiteilchen auswärts orientieren und $(2\pi)^{-3/2} \bar{v}$, auslaufende Antiteilchen einwärtsorientieren und $(2\pi)^{-3/2} v$

- Vertices: In jedem Vertex laufen 2 fermionische und eine photonische Linie zusammen und

$$e_0 (2\pi)^4 \delta^4(\text{ein-auslaufende Wellenvektoren});$$

- innere Photonlinien: $\frac{i\eta_{\mu,\nu}}{(\vec{k}_1+\vec{k}_2)^2+i\varepsilon} (2\pi)^{-4}$

- über innere Wellenzahlen integrieren

Für den elastischen, differentiellen Streuquerschnitt im Schwerpunktsystem (CMS) in der Ordnung e_0^2 von S gilt (ohne Beweis) unter Beachtung der in T enthaltenen Zustands"normierung" (5)

$$\frac{d\sigma^*}{d\Omega}(\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2 \leftarrow \mathbf{k}_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left(\frac{\pi}{4\bar{\omega}(\mathbf{k}_1)} \right)^2 |T(\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1, -\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_2; \mathbf{k}_1, \varepsilon_1, -\mathbf{k}_1, \varepsilon_2)|^2.$$

Der spininklusive CMS-Querschnitt bei unpolarisiertem Streuzustand ist durch

$$\frac{d\bar{\sigma}^*}{d\Omega}(\mathbf{k}'_1 \leftarrow \mathbf{k}_1) = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon_2} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{k}'_1, \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \leftarrow \mathbf{k}_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

gegeben. Eine längere Rechnung (Spuren in $\mathbb{C}^{4 \times 4}$ unter Ausnutzung von Diracrelationen analog zu Übungsbaltt 10, Bsp 2) ergibt mit $\bar{\omega} := \bar{\omega}(\mathbf{k}_1)$ und $\mathbf{k}'_1 \mathbf{k}_1 := |\mathbf{k}'_1| |\mathbf{k}_1| \cos \theta$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}^*}{d\Omega}(\mathbf{k}'_1 \leftarrow \mathbf{k}_1) &= \left(\frac{\alpha}{2\bar{\omega}} \right)^2 \left(\frac{5}{4} - I_1 + I_2 + I_3 \right), \\ I_1 &:= \frac{8\bar{\omega}^4 - \kappa^4}{\bar{\omega}^2 (\bar{\omega}^2 - \kappa^2) (1 - \cos \theta)}, \\ I_2 &:= \frac{1}{2} \left(\frac{2\bar{\omega}^2 - \kappa^2}{(\bar{\omega}^2 - \kappa^2) (1 - \cos \theta)} \right)^2, \\ I_3 &:= \frac{2\bar{\omega}^4 (2 \cos \theta - \sin^2 \theta) + 4\bar{\omega}^2 \kappa^2 (1 - \cos \theta) (2 + \cos \theta) + 2\kappa^2 \cos^2 \theta}{(2\bar{\omega})^4}. \end{aligned}$$

Die phänomenologisch gebräuchlichen, lorentzinvarianten kinematischen Parameter des Streuprozesses sind die reellen Größen (s, t) , für die

$$s := \hbar^2 c^2 \left(\check{k}_1 + \check{k}_2 \right)^2 = 2\bar{\omega}^2 \hbar^2 c^2 > 0,$$

$$t := \hbar^2 c^2 \left(\check{k}'_1 - \check{k}_1 \right)^2 = -\hbar^2 c^2 4 |\mathbf{k}_1|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} < 0.$$

Beide haben die Dimension einer Energie. Das Faktum, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{<0} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $\frac{d\bar{\sigma}^*}{d\Omega}(\mathbf{k}'_1 \leftarrow \mathbf{k}_1) = f(s, t)$, ist eine Folge der Poincaréinvarianz der perturbativen QED.

Messdaten zu $\frac{d\bar{\sigma}^*}{d\Omega}(\mathbf{k}'_1 \leftarrow \mathbf{k}_1)$ sind zu finden in:

1. MARK J Collaboration, *A Summary of Experimental Results from MARK J: High energy e^+e^- collisions at PETRA*, Phys Rep 109 (1984) 131
2. H U Martyn, *Tests of QED by High Energy Electron - Positron Collisions*, in T Kinoshita (Ed.), *Quantum Electrodynamics* (Advanced Series on Directions in High Energy Physics) Vol 7, World Scientific, Singapore, 1990