1 Das Klein Gordon Quantenfeld

Gebhard Grübl
Institut für Theoretische Physik, Universität Innsbruck
Notizen zu Quantentheorie II, WS 02/03

1.1 Das klassische KG-System

Sei V ein reeller Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei ein inneres Produkt von V und $\underline{e} = (e_0, ..e_3)$ eine Basis von V mit $\langle e_\mu, e_\nu \rangle = \eta_{\mu,\nu}$. Für $x \in V$ wird notiert $x = x^\mu e_\mu$. (Gelegentlich wird (x^μ) als Karte von V aufgefasst.) Der UVR V_0 ist die lineare Hülle von (e_1, e_2, e_3). Die Einschränkung von $-\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $V_0 \times V_0$ ist ein Skalarprodukt. Die zugehörige Norm wird mit $|\cdot|$ bezeichnet. Es wird für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_0$ notiert $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Der affine Unterraum $V_\tau := V_0 + \tau e_0$ ist ein Raum gleichzeitiger Ereignisse. Für eine diffbare Funktion $f : V \to \mathbb{C}$ sei $\partial_\mu f : V \to \mathbb{C}, x \mapsto d_x f(e_\mu) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon e_\mu) - f(x)}{\varepsilon}$. Das Vektorfeld $grad(f) = \natural df = e_\mu \eta^{\mu,\nu} \partial_\nu f$ mit $\eta^{\mu,\nu} \eta_{\nu,\rho} = \delta^\mu_\nu$ ist das Gradientenfeld zum inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die kanonische Übertragung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf das Tensorbündel über V wird auch mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet.

Für eine diffbare Funktion $\phi : V \to \mathbb{R}$ mit ϕ und $\partial_\mu \phi$ in $L^2(V : \mathbb{R})$ mit der metrischen Volumsform $d^4x = dx^0 \wedge .. \wedge dx^3$ ist für eine Konstante $\kappa > 0$

$$W(\phi) = \int_V d^4x \mathcal{L}_\phi \text{ mit der Lagrangedichte } \mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \left(\langle d\phi, d\phi \rangle - \kappa^2 \phi^2 \right)$$

das KG-Wirkungsfunktional. Beachte: $\langle d\phi, d\phi \rangle = \eta^{\mu,\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi)$. Ist W stationär in ϕ, dann gilt

$$\left(\Box + \kappa^2 \right) \phi = 0.$$

Der Wellenoperator: $\Box \phi = \left(\partial_0 \partial_0 - \sum_{l=1}^3 \partial_l \partial_l \right) \phi$.

Ist x^μ eine Länge[1], man schreibt $[x^\mu] = L$, und ist $W(\phi)$ eine Wirkung, man schreibt $[W(\phi)] = [\hbar]$, dann gilt $[\phi] = \left[\hbar^{1/2} \right] / L$ und $[\kappa] = 1/L$. Das wird im folgenden angenommen.

Lösung des Anfangswertproblems:

Proposition 1 *Sind $f, g \in \mathcal{S}(V_0 : \mathbb{R})$, dann existiert genau eine Funktion $\phi : V \to \mathbb{R}$ mit $\left(\Box + \kappa^2 \right) \phi = 0$ und $\phi |_{V_0} = f$, $\partial_0 \phi |_{V_0} = g$. Für diese Lösung gilt*

$$\phi(x) = \int_{V_0} \frac{d^3k}{2\varpi(\mathbf{k})} \left(a(\mathbf{k}) \frac{e^{-i\langle k_\kappa, x \rangle}}{(2\pi)^{3/2}} + cc \right)$$

wobei $k_\kappa = \varpi(\mathbf{k}) e_0 + \mathbf{k}$ mit $\varpi(\mathbf{k}) = \sqrt{\kappa^2 + |\mathbf{k}|^2}$ und d^3k die metrische Volumsform von V_0 ist. Für die Spektralfunktion a gilt $a(\mathbf{k}) = \varpi(\mathbf{k}) (\mathcal{F}f)(\mathbf{k}) + i (\mathcal{F}g)(\mathbf{k})$ mit der Fouriertransformation

$$(\mathcal{F}f)(\mathbf{k}) = \int_{V_0} d^3x \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} f(\mathbf{x}).$$

Es gilt $[k_k] = L^{-1}$ und $[a] = [\phi] L^2 = \left[\hbar^{1/2} \right] L$. Das Maß $d\mu := \frac{d^3k}{2\varpi(\mathbf{k})}$ ist die metrische Volumsform auf der oberen Massenschale; sie ist invariant unter $L_+^\uparrow$.

Wegen

$$\phi(x) = \int_{V_0} d\mu \left(a(\mathbf{k}) e^{-ix^0 \varpi(\mathbf{k})} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} + cc \right)$$

scheint dem dynamischen System der KG-Gleichung einer Familie von entkoppelten harmonischen Oszillatoramplituden $a(x^0, \mathbf{k}) := a(\mathbf{k}) e^{-ix^0 \varpi(\mathbf{k})}$ mit Frequenz $\varpi(\mathbf{k})$ zu entsprechen. Die Frage drängt sich somit auf: Kann dieses Modell überabzählbar unendlich vieler klassischer harmonischer Oszillatoren "quantisiert" werden? Das geht tatsächlich und wird später beschrieben.

Die Addition von V operiert als Gruppe auf der Lösungsmenge der KG-Gleichung: $(v\phi)(x) = \phi(x - v)$. Für Lösungen mit Cauchydaten in $\mathcal{S}(V_0 : \mathbb{R})$ definiert die Spektralfunktion von $v\phi$ die folgende Operation auf $\mathcal{S}(V_0 : \mathbb{C})$:

$$(va)(\mathbf{k}) = e^{i\langle k_\kappa, v \rangle} a(\mathbf{k})$$

[1] Beachte: $x^0 = ct$ mit der Zeitkoordinatenfunktion t und der Lichtgeschwindigkeit c

Der Feldenergieimpulstensor und -vektor: Für das symmetrische Feldenergieimpulskotensorfeld einer Lösung ϕ der KG-Gleichung $K := d\phi \otimes d\phi - \mathcal{L}_\phi \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle =: K_{\mu,\nu} \left(dx^\mu \otimes dx^\nu \right)$ gilt

$$K_{\mu,\nu} = \left(\partial_\mu \phi \right) \left(\partial_\nu \phi \right) - \eta_{\mu,\nu} \cdot \mathcal{L}_\phi .$$

Es gilt $\partial_\rho \eta^{\rho\mu} K_{\mu,\nu} = 0$. Ist v ein konstantes Vektorfeld auf V, dann ist $e_\rho \eta^{\rho\mu} K_{\mu,\nu} v^\nu = \natural \left(K(\cdot, v) \right) = grad\,(\phi)\, d\phi\,(v) - v\mathcal{L}_\phi$ ein divergenzfreies Vektorfeld auf V. Einsetzen dieses Vektorfeldes in d^4x und Integration der enstehenden geschlossenen 3-Form über V_τ ergibt für Lösungen des Typs vom obigen Satz die Zahl $\langle P, v \rangle$ mit dem Energieimpulsvektor $P \in V$, der unabhängig von τ ist. Für ihn gilt

$$P = e_\nu \eta^{\nu,\mu} \int_{V_\tau} d^3x K_{0,\mu} = \int_{V_0} d\mu k_\kappa \left| a(\mathbf{k}) \right|^2 .$$

Die Dimension $[P] = [\hbar]\, L^{-1} = [\hbar k_\kappa] =$ [Impuls]. Die Feldenergie $E := P^0 c$.

1.2 Kommutatorquantisierung

Heuristische Idee in Anlehnung an die Quantisierung endlich vieler unabhängiger harmonischer Oszillatoren: Suche einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Operatoren $\{a(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in V_0\}$, für die

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = 0, [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')^*] = 2\varpi(\mathbf{k})\hbar\delta^3 \left(\mathbf{k} - \mathbf{k}' \right)$$

gilt. Der $*$ bedeutet die hermitesche Adjunktion bezüglich des Skalarproduktes von $\mathcal{H}$. Formal folgt dann für den Operator

$$P := \int_{V_0} d\mu k_\kappa a(\mathbf{k})^* a(\mathbf{k}),$$

dass

$$[P, a(\mathbf{k})] = -\hbar k_\kappa a(\mathbf{k}) \text{ und } [P, a(\mathbf{k})^*] = \hbar k_\kappa a(\mathbf{k})^* .$$

Falls $\langle P, v \rangle =: \hbar \langle K, v \rangle$ für alle $v \in V$ selbstadjungiert ist, folgt

$$e^{i\langle K,v \rangle} a(\mathbf{k}) e^{-i\langle K,v \rangle} = e^{-i\langle k_\kappa, v \rangle} a(\mathbf{k}).$$

Macht dann auch noch der Operator

$$\phi(x) = \int_{V_0} d\mu \left(a(\mathbf{k}) \frac{e^{-i\langle k_\kappa, x \rangle}}{(2\pi)^{3/2}} + hc \right)$$

Sinn, dann folgt

$$e^{i\langle K,v \rangle} \phi(x) e^{-i\langle K,v \rangle} = \phi(x+v).$$

Die Operatoren $\langle K, v \rangle$ sind dann die Erzeugenden von unitären Raumzeittranslationsoperatoren und es liegt nahe, den Operator $H := \hbar c K^0$ als Hamiltonoperator einer Quantendynamik $i\hbar c \partial_0 \Psi_{x^0} = H \Psi_{x^0}$ aufzufassen.

Der Energieoperator H wird nur dann ein von unten beschränktes Spektrum haben, wenn ein Vektor $\Omega \in \mathcal{H}$ existiert, für den $a(\mathbf{k})\Omega = 0$ für alle $\mathbf{k} \in \mathbf{V}_0$. Ein Vektor $a(\mathbf{k})^*\Omega$ ist in diesem Fall wegen der Aufsteigerelation $[P, a(\mathbf{k})^*] = \hbar k_\kappa a(\mathbf{k})^*$ ein (uneigentlicher, simultaner) Eigenvektor von P zum Eigenwertvektor $\hbar k_\kappa$. Die Menge $\{\hbar k_\kappa \mid \mathbf{k} \in \mathbf{V}_0\}$ stimmt mit der Menge aller Energieimpulsvektoren eines relativistischen Massenpunkts der Masse m mit $\kappa = mc/\hbar$ überein. Die Zustände $a(\mathbf{k})^*\Omega$ realisieren also die Energieimpulsbeziehung eines relativistischen Massenpunkt. $p = \hbar k_\kappa$ ist die relativistische de Broglie Relation.

Analog ist $a(\mathbf{k}_1)^* ... a(\mathbf{k}_n)^*\Omega$ Eigenvektor von P zum Eigenwert $\sum_{i=1}^n \hbar \left(k_\kappa \right)_i$. Das gemeinsame Spektrum von P enthält somit die Menge

$$\{0 \in V\} \cup \left\{ k \in V \mid \langle k, k \rangle = \kappa^2, k^0 > 0 \right\} \cup \left\{ k \in V \mid \langle k, k \rangle \geq 4\kappa^2, k^0 > 0 \right\} .$$

Beachte $P\Omega = 0$. Diese Struktur deckt sich mit der Bildung von n-Teilchen Energieimpulsvektoren von relativistischen Massenpunkten. Der Vektor Ω heißt Vakuumvektor. Die Quantisierung der klassischen Wellengleichung hat also Züge einer klassischen Teilchenphysik hervorgebracht! Dies ist wirklich überraschend.

Die Normierung von $a(\mathbf{k})^*\Omega$ folgt mit der Kommutatorquantisierungsrelation zu

$$\langle a(\mathbf{k})^*\Omega, a(\mathbf{k}')^*\Omega \rangle = 2\varpi(\mathbf{k})\hbar\delta^3 \left(\mathbf{k} - \mathbf{k}' \right) \|\Omega\|^2 .$$

Im weiteren wird $\|\Omega\| = 1$ angenommen. Der Quantisierungsparameter $\hbar$ fällt aus den Kommutatorrelationen der umskalierten Größen $\Phi(x) = \phi(x)/\sqrt{\hbar}$ und $A(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k})/\sqrt{\hbar}$ heraus. Es gilt dann

$$\begin{aligned} P &= \hbar \int_{V_0} d\mu k_\kappa A(\mathbf{k})^* A(\mathbf{k}), \\ [A(\mathbf{k}), A(\mathbf{k}')^*] &= 2\varpi(\mathbf{k})\delta^3\left(\mathbf{k} - \mathbf{k}'\right), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Normierbare Vektoren in $\mathcal{H}$ gewinnt man so:

$$A_f^*\Omega := \int_{V_0} d\mu f(\mathbf{k}) A(\mathbf{k})^*\Omega.$$

Es folgt

$$\left\|A_f^*\Omega\right\|^2 = \int_{V_0} d\mu \left|f(\mathbf{k})\right|^2.$$

Der Einteilchenraum ist mit $L^2 := L^2\left(V_0 : \mathbb{C}; d\mu\right)$

$$\mathcal{H}_1 = \left\{\int_{V_0} d\mu f(\mathbf{k}) A(\mathbf{k})^*\Omega \mid f \in L^2\right\},$$

wobei noch nicht klar ist, in welchem Raum Ω liegt. Die Zahl

$$\frac{1}{\|f\|_{L^2}^2} \int_{\Delta \subset V_0} d\mu \left|f(\mathbf{k})\right|^2$$

wird als Wahrscheinlichkeit für einen Wellenzahlvektor $\mathbf{k}$ in Δ, oder äquivalent dazu für einen Impuls $\hbar\mathbf{k}$ in $\hbar\Delta$ interpretiert. Ortswahrscheinlichkeiten sind in dieser Theorie nicht als primäre Größen definiert und es gelingt auch nicht in zufriedenstellender Weise.

Den Zweiteilchenraum erhält man so:

$$\left(A^* \otimes A^*\right)_f \Omega = \int_{V_0 \times V_0} d\mu_1 d\mu_2 \frac{f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{\sqrt{2}} A(\mathbf{k}_1)^* A(\mathbf{k}_2)^*\Omega.$$

Da $A(\mathbf{k}_1)^* A(\mathbf{k}_2)^* = A(\mathbf{k}_2)^* A(\mathbf{k}_1)^*$ trägt zum Integral nur der symmetrische Teil der Funktion f, also $\left(f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + f(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)\right)/2$ bei. Daher kann die Funktion f als symmetrisch vorausgesetzt werden. Es gilt dann

$$\left\|\left(A^* \otimes A^*\right)_f \Omega\right\|^2 = \int_{V_0 \times V_0} d\mu_1 d\mu_2 \left|f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\right|^2.$$

Es gilt also

$$\mathcal{H}_2 = \left\{\int_{V_0 \times V_0} d\mu_1 d\mu_2 \frac{f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{\sqrt{2}} A(\mathbf{k}_1)^* A(\mathbf{k}_2)^*\Omega \mid f \in \left(L^2 \otimes L^2\right)_{sym}\right\}.$$

Beachte, dass für $\psi_1 \in \mathcal{H}_1$ und $\psi_2 \in \mathcal{H}_2$ gilt: $\left\langle\psi_1, \psi_2\right\rangle = 0$. Nach diesem Schema ergibt sich der n-Teilchenraum

$$\mathcal{H}_n = \left\{\int_{V_0^n} d\mu_1..d\mu_n \frac{f(\mathbf{k}_1, .., \mathbf{k}_n)}{\sqrt{n!}} A(\mathbf{k}_1)^* A(\mathbf{k}_2)^*\Omega \mid f \in \left(L^2 \otimes .. \otimes L^2\right)_{sym}\right\} \simeq \left(\otimes^n L^2\right)_{sym}.$$

Der gesamte Hilbertraum $\mathcal{H}$ enthält somit die direkte orthogonale Summe $\bigoplus_{n=0}^\infty \mathcal{H}_n$, wobei $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}\Omega$. Die Minimalkonstruktion besteht nun in der Annahme

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathcal{H}_n.$$

Dieser Raum ist isomorph zum bosonischen Fockraum über L^2

$$\mathcal{F}_b(L^2) = \bigoplus_{n=0}^\infty \left(\otimes^n L^2\right)_{sym} \text{ mit } \left(\otimes^0 L^2\right)_{sym} = \mathbb{C}.$$

Jedes Element Ψ dieses Raumes ist eine unendliche Folge $\Psi = \left(\psi_n\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $\psi_n \in \left(\otimes^n L^2\right)_{sym}$ und Normquadrat

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|\psi_n\|^2 < \infty.$$

Für $\psi_0 \in \mathbb{C}$ gilt $\|\psi_0\| = |\psi_0|$.

Der (unbeschränkte) Operator N in $\mathcal{H}$, der auf den Unterräumen $\mathcal{H}_n$ mit $n \cdot id$ übereinstimmt, heißt Teilchenzahloperator. Es gilt

$$N = \int_{V_0} d\mu A(\mathbf{k})^* A(\mathbf{k}).$$

Das Quantenfeld $\Phi(x)$ in der angegeben Minimalkonstruktion heißt KG-Quantenfeld. Für den Feldkommutator gilt mit Paulis kausaler Ausbreitungsfunktion

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V_0} d\mu \left(e^{-i\langle k_\kappa, x-y \rangle} - cc \right) \right) id_{\mathcal{H}} = i\Delta(x-y) id_{\mathcal{H}}.$$

Eine mathematisch haltbare Ausarbeitung des hier beschriebenen Entwurfs zeigt, dass $x \mapsto \Phi(x)$ und $\mathbf{k} \mapsto A(\mathbf{k})$ keine operatorwertigen Funktionen, sondern Distributionen sind. (Formale) Integrale des Typs $\Phi_f := \int_V d^4x \Phi(x) f(x)$ werden für reellwertiges f mit kompaktem Träger als Heisenbergbild - Observable interpretiert, die innerhalb des Raumzeitgebietes $\mathrm{supp}(f)$ gemessen werden können. Dann impliziert der Feldkommutator

$$[\Phi_f, \Phi_g] = i \left(\int_{V \times V} \Delta(x-y) f(x) g(y) d^4x d^4y \right) id_{\mathcal{H}},$$

dass Φ_f und Φ_g kommutieren, wenn die Träger von f und g zueinander raumartig sind. Dieser Sachverhalt heißt Lokalität des KG-Quantenfeldes. Welche Konsequenz hat das? Meist wird an dieser Stelle als klar hingestellt, dass dann eine Messung von Φ_f keine Auswirkung auf die Statistik einer Messung von Φ_g hat.

Ein für die (zeitgeordnete) Dysonreihe des Streuoperators wechselwirkender Quantenfeldtheorien zentrales Objekt ist der Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Feldproduktes $T(\Phi(x), \Phi(y))$. Es gilt $T(\Phi(x), \Phi(y)) = \Phi(x)\Phi(y)$ für $x^0 > y^0, T(\Phi(x), \Phi(y)) = \Phi(y)\Phi(x)$ für $y^0 > x^0$ und $T(\Phi(x), \Phi(y)) = \Phi(x)\Phi(y) = \Phi(y)\Phi(x)$ für $x^0 = y^0$. Es gilt weiter

$$\begin{aligned} \langle \Omega, T(\Phi(x), \Phi(y)) \Omega \rangle &= \Theta(x^0 - y^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V_0} d\mu e^{-i\langle k_\kappa, x-y \rangle} + \Theta(y^0 - x^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V_0} d\mu e^{i\langle k_\kappa, x-y \rangle} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_V d^4k \frac{e^{-i\langle k, x-y \rangle}}{\langle k, k \rangle - \kappa^2 + i\varepsilon} =: -i\Delta_F(x-y). \end{aligned}$$

Die Distribution Δ_F heißt "Feynmanpropagator des KG - Feldes"[2] und es gilt $\left(\Box + \kappa^2\right) \Delta_F = \delta^4$. Die (komplexe) Fundamentallösung $\Delta_F(x)$ der KG-Gleichung ist für $x^0 > 0$ eine (lorentzinvariante) Überlagerung aller positiv Frequenzwellen $e^{-i\langle k_\kappa, x \rangle}$ und für $x^0 < 0$ eine Überlagerung aller negativ Frequenzwellen $e^{i\langle k_\kappa, x \rangle}$. Man vergleiche dies mit der retardierten bzw. avancierten Fundamentallösung (beide reell):

$$\begin{aligned} \Delta_{ret}(x) &= -\Theta(x^0)\Delta(x), \\ \Delta_{av}(x) &= \Theta(-x^0)\Delta(x). \end{aligned}$$

Zeitgeordnete Produkte des Typs $T(\Phi(x_1), ..., \Phi(x_n))$ sind analog definiert: Sei $\pi : \{1, ..n\} \to \{1, ..n\}$ bijektiv und so, dass $x^0_{\pi(1)} \geq ... \geq x^0_{\pi(n)}$, dann ist[3]

$$T(\Phi(x_1), ..., \Phi(x_n)) = \Phi(x_{\pi(1)}) ... \Phi(x_{\pi(n)}).$$

Eine bijektive Abbildung $c : \{0, 1\} \times \{1, .., n\} \to \{1, .., 2n\}$ mit $c(0, i) < c(1, i)$ und $c(0, i) < c(0, j)$ für alle $i, j \in \{1, .., n\}$ mit $i < j$ heißt eine aufsteigende Kontraktion von $\{1, .., 2n\}$. Sei K_n die Menge aller aufsteigenden Kontraktionen von $\{1, .., 2n\}$. Dann gilt (Wicksches Theorem)

$$\langle \Omega, T(\Phi(x_1), ... \Phi(x_{2n})) \Omega \rangle = \sum_{c \in K_n} \Pi_{i=1}^n \langle \Omega, T(\Phi(c(0, i), \Phi(c(1, i)) \Omega \rangle.$$

Beispiel: Mit der Abkürzung $\langle 1, ..2n \rangle_T := \langle \Omega, T(\Phi(x_1), ... \Phi(x_{2n})) \Omega \rangle$ gilt für $n = 4$

$$\langle 1, 2, 3, 4 \rangle_T = \langle 1, 2 \rangle_T \langle 3, 4 \rangle_T + \langle 1, 3 \rangle_T \langle 2, 4 \rangle_T + \langle 1, 4 \rangle_T \langle 2, 3 \rangle_T.$$

[2] Zum Feynmanpropagator trägt also nur der Erzeugungssteil jenes Feldes mit dem früheren Zeitargument und der Vernichtungsteil jenes Feldes mit dem späteren Zeitargument bei. Dass dies eine lorentzinvariante Begriffbildung ist, liegt an der Lokaität des Modells.

[3] Haben zwei der Argumente $(x_1, .., x_n)$ dieselbe 0-Koordinate, dann ist die Permutation π nicht eindeutig bestimmt. Das zeitgeordnete Produkt $T(\Phi(x_1), ..., \Phi(x_n))$ hängt aber nicht von der Auswahl von π ab.