

1 Das Dirac Quantenfeld

Gebhard Gröbl

Institut für Theoretische Physik, Universität Innsbruck
Notizen zu Quantentheorie II, WS 02/03

1.1 Das klassische Dirac-System

Sei V ein reeller Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei ein inneres Produkt von V und $\underline{e} = (e_0, \dots, e_3)$ eine Basis von V mit $\langle e_\mu, e_\nu \rangle = \eta_{\mu,\nu}$. Für $x \in V$ wird notiert $x = x^\mu e_\mu$. (Gelegentlich wird (x^μ) als Karte von V aufgefasst.) Der UVR V_0 ist die lineare Hülle von (e_1, e_2, e_3) . Die Einschränkung von $-\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $V_0 \times V_0$ ist ein Skalarprodukt. Die zugehörige Norm wird mit $|\cdot|$ bezeichnet. Es wird für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_0$ notiert $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Der affine Unterraum $V_\tau := V_0 + \tau e_0$ ist ein Raum gleichzeitiger Ereignisse.

Die Abbildung $\gamma : V \rightarrow \mathbb{C}^{4 \times 4}$ sei linear und es gelte $\gamma(v)^2 = E_4 \langle v, v \rangle$ für alle $v \in V$. Da die Abbildung $(v, w) \mapsto \gamma(v)\gamma(w) + \gamma(w)\gamma(v)$ auf $V \times V$ bilinear und symmetrisch ist, folgt mit der Polarisierungsformel für alle $v, w \in V$, dass $\gamma(v)\gamma(w) + \gamma(w)\gamma(v) = 2E_4 \langle v, w \rangle$. Die Matrizen $\gamma_\mu := \gamma(e_\mu)$ sind somit Diracmatrizen. (Siehe Kapitel über die Diracgleichung.) Die Matrix $B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ erfülle $\gamma_\mu^+ B = B \gamma_\mu, B^+ = B, B \gamma_0 > 0$. Hier bedeutet $+$ die Transposition und komplexe Konjugation einer Matrix. (In der Standardwahl der γ_μ von Bjorken und Drell kann $B = \gamma_0$ gewählt werden.) Die Diracadjunktion ist die Abbildung von $\mathbb{C}^{4 \times 1} \rightarrow \mathbb{C}^{1 \times 4}, \psi \mapsto \psi^+ B =: \bar{\psi}$. Die Sesquilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_D : \mathbb{C}^{4 \times 1} \times \mathbb{C}^{4 \times 1} \rightarrow \mathbb{C}, (f, g) \mapsto \bar{f} \gamma_0 g$$

ist ein Skalarprodukt von $\mathbb{C}^{4 \times 1}$, das Diracskalarprodukt. In der Bjorken Darstellung der Diracmatrizen mit der Wahl $B = \gamma_0$ stimmt es mit dem Standardskalarprodukt überein. Bezüglich des indefiniten inneren Produktes $\bar{f}g = \langle f, \gamma_0 g \rangle_D$ ist die lineare Abbildung $\gamma(v)$ für $v \in V$ selbstadjungiert.

Für eine diffbare Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{C}^{4 \times 1}$ sei $\partial_\mu f : V \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto d_x f(e_\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon e_\mu) - f(x)}{\varepsilon}$. Die Diracableitung von f ist die $\mathbb{C}^{4 \times 1}$ -wertige Funktion $\delta f := \eta^{\mu,\nu} \gamma_\mu \partial_\nu f$ auf V . Die Abbildung δ ist unabhängig von der Wahl der Basis \underline{e} .

Das Dirac-Wirkungsfunktional: Sei $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}^{4 \times 1}$ eine diffbare Funktion, sodass ψ und $\partial_\mu \psi$ Elemente von $L^2(V : \mathbb{C}^{4 \times 1})$ sind. Sei $d^4 x = dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3$ die metrische Volumensform von V und sei $\kappa > 0$ eine Konstante. Dann ist

$$W(\psi) = \int_V d^4 x \mathcal{L}_\psi \text{ mit der Lagrangedichte } \mathcal{L}_\psi = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \delta \psi - \delta \bar{\psi} \psi) - \kappa \bar{\psi} \psi$$

ein Wirkungsfunktional zur Diracgleichung. Denn: Ist W stationär in ψ , dann ist die Funktion ψ Lösung von

$$(i\delta - \kappa) \psi = 0.$$

Ist x^μ eine Länge, man schreibt $[x^\mu] = L$, und ist $W(\psi)$ eine Wirkung, man schreibt $[W(\psi)] = [\hbar]$, und sind die Diracmatrizen dimensionslos, dann gilt $[\psi] = [(\hbar/L^3)^{1/2}]$ und $[\kappa] = 1/L$. Das wird im folgenden angenommen.

Sei nun für $\mathbf{k} \in V_0$ der Vektor $k_\kappa := \bar{\omega}(\mathbf{k}) e_0 + \mathbf{k}$ mit $\bar{\omega}(\mathbf{k}) := \sqrt{\kappa^2 + |\mathbf{k}|^2}$. Die Matrix $\gamma(k_\kappa)$ hat die beiden Eigenwerte $\pm \kappa$; beachte $\gamma(k_\kappa)^2 = \kappa^2 E_4$; wegen $Sp(\gamma(v)) = 0$ für alle $v \in V$ gehört zu jedem Eigenwert ein zweidimensionaler Eigenraum.¹ Die Menge $\{u(\mathbf{k}, \varepsilon) \mid \varepsilon = \pm 1\}$ sei eine Basis von $\ker(\gamma(k_\kappa) - \kappa)$ und die Menge $\{v(\mathbf{k}, \varepsilon) \mid \varepsilon = \pm 1\}$ sei eine Basis ("Diracbasis") von $\ker(\gamma(k_\kappa) + \kappa)$ mit

$$\langle u(\mathbf{k}, \varepsilon), u(\mathbf{k}, \varepsilon') \rangle_D = \langle v(\mathbf{k}, \varepsilon), v(\mathbf{k}, \varepsilon') \rangle_D = 2\bar{\omega}(\mathbf{k}) \delta_{\varepsilon, \varepsilon'}, \quad \langle u(\mathbf{k}, \varepsilon), v(\mathbf{k}, \varepsilon') \rangle_D = 0.$$

Lösung des Anfangswertproblems:

Proposition 1 Ist $f \in \mathcal{S}(V_0 : \mathbb{C}^{4 \times 1})$, dann existiert genau eine Funktion $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}^{4 \times 1}$ mit $(i\delta - \kappa) \psi = 0$ und $\psi|_{V_0} = f$. Für diese Funktion ψ gilt

$$\psi(x) = \sum_{\varepsilon = \pm 1} \int_{V_0} \frac{d^3 k}{2\bar{\omega}(\mathbf{k})} \left(a(\mathbf{k}, \varepsilon) u(\mathbf{k}, \varepsilon) \frac{e^{-i\langle k_\kappa, x \rangle}}{(2\pi)^{3/2}} + b(\mathbf{k}, \varepsilon)^* v(\mathbf{k}, \varepsilon) \frac{e^{i\langle k_\kappa, x \rangle}}{(2\pi)^{3/2}} \right)$$

¹Das wurde im Kapitel über die Diracgleichung gezeigt. Das Verschwinden der Spur wurde mithilfe der Matrix γ_5 bewiesen.

wobei d^3k die metrische Volumsform von V_0 ist, und die Spektralfunktionen a und b durch

$$a(\mathbf{k}, \varepsilon) = \mathcal{F}(\langle u(\mathbf{k}, \varepsilon), f \rangle_D)(\mathbf{k}), \quad b(\mathbf{k}, \varepsilon)^* = \mathcal{F}(\langle v(\mathbf{k}, \varepsilon), f \rangle_D)(-\mathbf{k})$$

definiert sind. Dabei ist \mathcal{F} die übliche Fouriertransformation für $h \in \mathcal{S}(V_0 : \mathbb{C})$.²

$$(\mathcal{F}h)(\mathbf{k}) = \int_{V_0} d^3x \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} f(\mathbf{x})$$

Es gilt $[a] = [b] = [\hbar^{1/2}] L$.

Wie beim Klein Gordon System ist die Analogie zum dynamischen System einer Familie von entkoppelten harmonischen Oszillatoramplituden augenfällig.

Die Gruppe $(V, +)$ operiert auf der Lösungsmenge der Diracgleichung so: $(v\psi)(x) = \psi(x - v)$. Für Lösungen mit Cauchydaten in $\mathcal{S}(V_0 : \mathbb{C}^{4 \times 1})$ definiert die Spektralfunktion von $v\psi$ die folgende Operation auf $\mathcal{S}(V_0 : \mathbb{C})$:

$$(va)(\mathbf{k}, \varepsilon) = e^{i\langle k_\kappa, v \rangle} a(\mathbf{k}, \varepsilon), \quad (vb)^*(\mathbf{k}, \varepsilon) = e^{-i\langle k_\kappa, v \rangle} b(\mathbf{k}, \varepsilon)^*.$$

Der Feldenergieimpulstensor und -vektor: Das reelle, symmetrische Feldenergieimpulskotensorfeld K einer Lösung ψ der Diracgleichung ist folgendermaßen definiert (symmetrisierte Noetherkonstruktion):

$$K_{\mu, \nu} := \frac{i}{4} (\overline{\psi} (\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) \psi - c\bar{c}).$$

Es gilt $\partial_\rho \eta^{\rho\mu} K_{\mu, \nu} = 0$. Ist v ein konstantes Vektorfeld auf V , dann ist $e_\rho \eta^{\rho\mu} K_{\mu, \nu} v^\nu = \mathfrak{h}(K(\cdot, v))$ ein divergenzfreies Vektorfeld auf V . Einsetzen dieses Vektorfeldes in d^4x und Integration der entstehenden geschlossenen 3-Form über V_τ ergibt für Lösungen des Typs vom obigen Satz die Zahl $\langle P, v \rangle$ mit dem Energieimpulsvektor $P \in V$, der unabhängig von τ ist. Für ihn gilt

$$P = e_\nu \eta^{\nu, \mu} \int_{V_\tau} d^3x K_{0, \mu} = \sum_\varepsilon \int_{V_0} d\mu k_\kappa \left(|a(\mathbf{k}, \varepsilon)|^2 - |b(\mathbf{k}, \varepsilon)|^2 \right).$$

Die Dimension $[P] = [\hbar] L^{-1} = [\hbar k_\kappa] = [\text{Impuls}]$. Die Feldenergie $E := P^0 c$.

Bemerkenswert ist, dass die Negativfrequenzamplitude b einen negativen Beitrag zur Feldenergie liefert. Dieses Problem versuchte Dirac in seinem "See" von Elektronen, der alle Moden negativer Energie flutet, zu versenken. Eine konsistente Ausformulierung dieser Vorstellung gelang erst durch die Erfindung des Diracquantenfeldes. Da die Diracgleichung, die zunächst als Wellengleichung eines relativistischen Quants gedacht war, den Ausgangspunkt für die Definition einer relativistischen Vielteilchendynamik bildet, wird diese Definition oft als zweite Quantisierung bezeichnet.

1.2 Antikommutatorquantisierung

Eine naheliegende Übertragung der Quantisierungsprozedur des Klein - Gordon Systems wäre die folgende. Suche einen Hilbertraum \mathcal{H} mit Operatoren $\{a(\mathbf{k}, \varepsilon), b(\mathbf{k}, \varepsilon) \mid \mathbf{k} \in V_0\}$, für die

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}, \varepsilon), a(\mathbf{k}', \varepsilon')] &= [a(\mathbf{k}, \varepsilon), b(\mathbf{k}', \varepsilon')] = [a(\mathbf{k}, \varepsilon), b(\mathbf{k}', \varepsilon')]^* = [b(\mathbf{k}, \varepsilon), b(\mathbf{k}', \varepsilon')] = 0, \\ [a(\mathbf{k}, \varepsilon), a(\mathbf{k}', \varepsilon')]^* &= [b(\mathbf{k}, \varepsilon), b(\mathbf{k}', \varepsilon')]^* = 2\overline{\omega}(\mathbf{k}) \hbar \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\varepsilon, \varepsilon'} \end{aligned}$$

gilt. Der $*$ bedeutet die hermitesche Adjunktion bezüglich des Skalarproduktes von \mathcal{H} . Setzt man weiter wieder die Existenz eines Vakuumvektors Ω voraus, der im Kern aller Operatoren a und b liegt, dann folgt für den (ad hoc definierten) Operator

$$P := \sum_\varepsilon \int_{V_0} d\mu k_\kappa (a(\mathbf{k}, \varepsilon)^* a(\mathbf{k}, \varepsilon) + b(\mathbf{k}, \varepsilon)^* b(\mathbf{k}, \varepsilon)),$$

² Diese Dirac-Fouriertransformation ist aus den formalen Gleichungen für die ebenen Wellenlösungen der Diracgleichung $U_{\mathbf{k}, \varepsilon}(x) = \frac{u(\mathbf{k}, \varepsilon)}{(2\pi)^{3/2}} \exp(-i\langle k_\kappa, x \rangle)$ und $V_{\mathbf{k}, \varepsilon}(x) = \frac{v(\mathbf{k}, \varepsilon)}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\langle k_\kappa, x \rangle)$ mit dem Skalarprodukt am Hilbertraum der Cauchydaten

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{V_0} d^3x \langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle_D$$

leicht zu merken

$$a(\mathbf{k}, \varepsilon) = \langle U_{\mathbf{k}, \varepsilon}(x^0, \cdot), \psi(x^0, \cdot) \rangle_{L^2}, \quad b(\mathbf{k}, \varepsilon)^* = \langle V_{\mathbf{k}, \varepsilon}(x^0, \cdot), \psi(x^0, \cdot) \rangle_{L^2}.$$

Diese wiederum folgen aus

$$\langle U_{\mathbf{k}, \varepsilon}(x^0, \cdot), U_{\mathbf{k}', \varepsilon'}(x^0, \cdot) \rangle_{L^2} = \langle V_{\mathbf{k}, \varepsilon}(x^0, \cdot), V_{\mathbf{k}', \varepsilon'}(x^0, \cdot) \rangle_{L^2} = 2\overline{\omega}(\mathbf{k}, \varepsilon) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\varepsilon, \varepsilon'}, \quad \langle U_{\mathbf{k}, \varepsilon}(x^0, \cdot), V_{\mathbf{k}', \varepsilon'}(x^0, \cdot) \rangle_{L^2} = 0.$$

dass 1)

$$[P, a(\mathbf{k}, \varepsilon)] = -\hbar k_\kappa a(\mathbf{k}, \varepsilon) \text{ und } [P, b(\mathbf{k}, \varepsilon)^*] = \hbar k_\kappa b(\mathbf{k}, \varepsilon)^*$$

und 2) für das Quantenfeld

$$\psi(x) = \sum_\varepsilon \int_{V_0} d\mu \left(a(\mathbf{k}, \varepsilon) u(\mathbf{k}, \varepsilon) \frac{e^{-i\langle k_\kappa, x \rangle}}{(2\pi)^{3/2}} + b(\mathbf{k}, \varepsilon)^* v(\mathbf{k}, \varepsilon) \frac{e^{i\langle k_\kappa, x \rangle}}{(2\pi)^{3/2}} \right)$$

mit $P = \hbar K$

$$e^{i\langle K, v \rangle} \psi(x) e^{-i\langle K, v \rangle} = \psi(x + v).$$

Die Operatoren $\langle K, v \rangle$ sind dann die Erzeugenden von unitären Raumzeittranslationsoperatoren und es läge nahe, den Operator $H := \hbar c K^0$ als Hamiltonoperator einer Quantendynamik $i\hbar c \partial_0 \Psi_{x^0} = H \Psi_{x^0}$ aufzufassen. Das Spektrum dieses Hamiltonoperators ist von unten beschränkt. Dieses Quantenmodell löst das Negativenergieproblem des klassischen Modells durch Verwendung von Erzeugern anstelle von Vernichtern als Spektralampplituden des Feldes bei den Negativfrequenzmoden. Ein Problem des kommutatorquantisierten Modells mit positiver Energie ist jedoch das Fehlen der Lokalität. (Übung) Deshalb wird das eben skizzierte Modell in der Physik nicht verwendet. (Eine Variante davon ist als "geladenes Klein - Gordon Quantenfeld" von Bedeutung.)

Die einzige heute³ bekannte Definition eines Quantenmodells zur Diracgleichung, die positive Energie und Lokalität garantiert, ist jene, die die Kommutatoren in den Quantisierungsrelationen durch Antikommutatoren $\{A, B\} := AB + BA$ ersetzt. Zur Parameterbereinigung wird die Konstruktion des Quantenfeldes $\Psi = \hbar^{-1/2} \psi$ mit der Zerlegung

$$\Psi(x) = \sum_\varepsilon \int_{V_0} d\mu \left(A(\mathbf{k}, \varepsilon) u(\mathbf{k}, \varepsilon) \frac{e^{-i\langle k_\kappa, x \rangle}}{(2\pi)^{3/2}} + B(\mathbf{k}, \varepsilon)^* v(\mathbf{k}, \varepsilon) \frac{e^{i\langle k_\kappa, x \rangle}}{(2\pi)^{3/2}} \right)$$

angegeben. Es sei für alle $\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in V_0$ und für alle $\varepsilon, \varepsilon' \in \{1, -1\}$

$$\begin{aligned} \{A(\mathbf{k}, \varepsilon), A(\mathbf{k}', \varepsilon')\} &= \{A(\mathbf{k}, \varepsilon), B(\mathbf{k}', \varepsilon')\} = \{A(\mathbf{k}, \varepsilon), B(\mathbf{k}', \varepsilon')^*\} = \{B(\mathbf{k}, \varepsilon), B(\mathbf{k}', \varepsilon')\} = 0, \\ \{A(\mathbf{k}, \varepsilon), A(\mathbf{k}', \varepsilon')^*\} &= \{B(\mathbf{k}, \varepsilon), B(\mathbf{k}', \varepsilon')^*\} = 2\bar{\omega}(\mathbf{k}) \hbar \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\varepsilon, \varepsilon'}. \end{aligned}$$

Weiter existiere im Raum der Operatoren A und B ein auf 1 normierter Vektor Ω mit $A(\mathbf{k}, \varepsilon)\Omega = B(\mathbf{k}, \varepsilon)\Omega = 0$. Ein Energieimpulsoperator $P = \hbar K$ mit

$$e^{i\langle K, v \rangle} \psi(x) e^{-i\langle K, v \rangle} = \psi(x + v)$$

ist durch

$$K := \sum_\varepsilon \int_{V_0} d\mu k_\kappa (A(\mathbf{k}, \varepsilon)^* A(\mathbf{k}, \varepsilon) + B(\mathbf{k}, \varepsilon)^* B(\mathbf{k}, \varepsilon)).$$

gegeben.⁴ Es gelten nämlich auch bei Antikommutatorquantisierung die Auf- und Absteigerrelationen

$$\begin{aligned} [K, A(\mathbf{k}, \varepsilon)] &= -k_\kappa A(\mathbf{k}, \varepsilon), & [K, A(\mathbf{k}, \varepsilon)^*] &= k_\kappa A(\mathbf{k}, \varepsilon)^*, \\ [K, B(\mathbf{k}, \varepsilon)] &= -k_\kappa B(\mathbf{k}, \varepsilon), & [K, B(\mathbf{k}, \varepsilon)^*] &= k_\kappa B(\mathbf{k}, \varepsilon)^*. \end{aligned}$$

Kommutator- und Antikommutatorquantisierung gebrauchen das folgende Schema: Seien b und f Operatoren mit

$$[b, b^*] = id, \quad \{f, f^*\} = id, \quad \{f, f\} = 0.$$

Dann gelten, aufgrund von

$$\begin{aligned} [AB, C] &= A[B, C] + [A, C]B \\ &= A\{B, C\} - \{A, C\}B \end{aligned}$$

in beiden Fällen die Auf- und Absteigerrelationen

$$\begin{aligned} [b^*b, b] &= -b, & [b^*b, b^*] &= b^*, \\ \{f^*f, f\} &= -f, & \{f^*f, f^*\} &= f^*. \end{aligned}$$

³ Unter gewissen Voraussetzungen wird dies auch immer so bleiben, wie das Spin Statistik Theorem (Pauli & Lüders, Jost) zeigt.

⁴ Der Operator P ist aufgrund der Antikommutatorquantisierung recht nahe an der Noetherkonstruktion des klassischen Modells, da $B^*B = -BB^* + \text{Zahl} \cdot id_{\mathcal{H}}$.

Die (uneigentlichen) Vektoren $A(\mathbf{k}, \varepsilon)^* \Omega$ und $B(\mathbf{k}, \varepsilon)^* \Omega$ sind wegen der Aufsteigerrelation $[P, A(\mathbf{k}, \varepsilon)^*] = \hbar k_\kappa A(\mathbf{k}, \varepsilon)^*$ und $[P, B(\mathbf{k}, \varepsilon)^*] = \hbar k_\kappa B(\mathbf{k}, \varepsilon)^*$ (uneigentliche, simultane) Eigenvektoren von P zum Eigenwertvektor $\hbar k_\kappa$. Die Menge $\{\hbar k_\kappa \mid \mathbf{k} \in \mathbf{V}_0\}$ stimmt mit der Menge aller Energieimpulsvektoren eines relativistischen Massenpunkts der Masse m mit $\kappa = mc/\hbar$ überein. Beachte $P\Omega = 0$. Der Vektor Ω heißt Vakuumvektor. Der Energieoperator H hat nichtnegatives Spektrum.

Normierbare Vektoren im Hilbertraum \mathcal{H} sind für $f \in L^2(V_0 \times \{1, -1\}; \mathbb{C}; d\mu) =: \mathcal{H}_1$

$$\begin{aligned} A_f^* \Omega &= \sum_\varepsilon \int_{V_0} d\mu f(\mathbf{k}, \varepsilon) A(\mathbf{k}, \varepsilon)^* \Omega, \\ B_f^* \Omega &= \sum_\varepsilon \int_{V_0} d\mu f(\mathbf{k}, \varepsilon) B(\mathbf{k}, \varepsilon)^* \Omega. \end{aligned}$$

Aus den Antikommutatorquantisierungsregeln folgt

$$\|A_f^* \Omega\|^2 = \|B_f^* \Omega\|^2 = \|f\|_{\mathcal{H}_e}^2 := \sum_\varepsilon \int_{V_0} d\mu |f(\mathbf{k}, \varepsilon)|^2$$

und $\langle A_f^* \Omega, B_g^* \Omega \rangle = 0$. Die Menge $\{A_f^* \Omega \mid f \in \mathcal{H}_1\} =: \mathcal{H}_e$ heißt Einelektronraum, und $\{B_f^* \Omega \mid f \in \mathcal{H}_1\} =: \mathcal{H}_{\bar{e}}$ heißt ein Einpositronraum.

Weitere Elemente von \mathcal{H} sind für Funktionen $f_i, g_j \in \mathcal{H}_1$ die Vektoren $A_{f_1}^* \dots A_{f_n}^* B_{g_1}^* \dots B_{g_m}^* \Omega$. Wegen der Antikommutatorquantisierung tragen zu diesem Vektor nur der antisymmetrische Anteil $(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)_-$ von $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ und jener von $g_1 \otimes \dots \otimes g_m$ bei. Der antisymmetrische Anteil ist dabei so definiert

$$(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)_- := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \cdot f_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes f_{\pi(n)}.$$

Daher stimmt die abgeschlossene lineare Hülle der Menge aller solchen Vektoren bei festem n und m mit

$$\mathcal{H}_{n,m} := (\wedge^n \mathcal{H}_e) \otimes (\wedge^m \mathcal{H}_{\bar{e}})$$

überein. Mit $\mathcal{H}_{0,0} = \mathbb{C} \cdot \Omega$ ist der Hilbertraum der Minimalkonstruktion durch die abgeschlossene, direkte, orthogonale Summe

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n,m \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}_{n,m},$$

gegeben. Der Hilbertraum $\mathcal{F}_f(\mathcal{H}_e) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} (\wedge^n \mathcal{H}_e)$ heißt fermionischer Fockraum über \mathcal{H}_e . Er tritt bei der zweiten Quantisierung der Schrödingergleichung in Erscheinung. Das Diracquantenfeld benötigt den Raum $\bigoplus_{n,m \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}_{n,m} \approx \mathcal{F}_f(\mathcal{H}_e) \otimes \mathcal{F}_f(\mathcal{H}_{\bar{e}})$.

Der (unbeschränkte) Operator N in \mathcal{H} , der auf den Unterräumen $\mathcal{H}_{n,m}$ mit $(n+m) \cdot id$ übereinstimmt, heißt Teilchenzahloperator. Es gilt

$$N = \sum_\varepsilon \int_{V_0} d\mu (A(\mathbf{k}, \varepsilon)^* A(\mathbf{k}, \varepsilon) + B(\mathbf{k}, \varepsilon)^* B(\mathbf{k}, \varepsilon)).$$

Der (unbeschränkte) Operator Q in \mathcal{H} , der auf den Unterräumen $\mathcal{H}_{n,m}$ mit $(n-m) \cdot id$ übereinstimmt, heißt Fermionenzahloperator. Es gilt

$$Q = \sum_\varepsilon \int_{V_0} d\mu (A(\mathbf{k}, \varepsilon)^* A(\mathbf{k}, \varepsilon) - B(\mathbf{k}, \varepsilon)^* B(\mathbf{k}, \varepsilon)).$$

Beide Operatoren kommutieren mit P . Bei wechselwirkenden Modellen tut dies im allgemeinen nur Q . (In manchen Modellen drückt dies die Erhaltung der elektrischen Ladung bei Teilchenerzeugung und Vernichtung aus.)

Das Quantenfeld $\Psi(x)$ in der angegebenen Minimalkonstruktion heißt Diracquantenfeld. Es gilt mit Paulis kausaler Ausbreitungsfunktion Δ

$$\begin{aligned} \{\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(y)\} &= \left(i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \kappa \delta_{\alpha\beta} \right) i\Delta(x-y) id_{\mathcal{H}}, \\ \{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(y)\} &= \{\bar{\Psi}_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(y)\} = 0. \end{aligned}$$

Aus "verschmierten" Feldern $\Psi_f := \int_V d^4x \langle f(x), \Psi(x) \rangle$ können Größen wie $O_f := \Psi_f + \Psi_f^*$ gebildet werden. Sie sind formal selbstadjungiert und somit Kandidaten für Observable. Für sie gilt jedoch: Es

existieren f und g mit raumartig zueinander liegenden Trägern und $[O_f, O_g] \neq 0$. Wäre O_f tatsächlich observabel, dann hätte das Modell ein Problem mit der Lokalität. Aus diesem und anderen Gründen⁵ wird im Fall des Diracquantenfeldes die Menge der lokalen Observablen etwas kleiner gehalten. Die "Bausteine" für Observablen sind die Tensorfelder, die aus dem Diracfeld gebildet werden können. (Auf ihnen operiert die $SL_2(\mathbb{C})$ nicht treu, sondern nur die eigentliche Lorentzgruppe.) Ein Musterbeispiel ist der (fermionisch normalgeordnete) elektrische Strom mit den Komponentenfunktionen

$$J_\mu(x) = \left(\overline{\Psi(x)} \gamma_\mu \Psi(x) \right)_N = \lim_{y \rightarrow x} \left(\overline{\Psi(y)} \gamma_\mu \Psi(x) - \langle \Omega, \overline{\Psi(y)} \gamma_\mu \Psi(x) \Omega \rangle id_{\mathcal{H}} \right)$$

Für das Operatorfeld J_μ gilt $[J_\mu(x), J_\nu(y)] = 0$ für $\langle x - y, x - y \rangle < 0$. (Übung) In diesem Sinn bewirkt also die Antikommutatorquantisierung die Lokalität des Diracfeldes.

Für die (zeitgeordnete) Dysonreihe des Streuoperators wechselwirkender Quantenfeldtheorien wird der Vakuumerwartungswert von zeitgeordneten Feldprodukten benötigt. Eigentlich treten dabei nur Tensorfelder (zB Strom J) auf, für die das Muster der bosonischen Zeitordnung, das uns von KG-feld bekannt ist, zum Tragen kommt. Es zeigt sich jedoch, dass äußerst einprägsame Rechenregeln (fermionisches Wicktheorem) entstehen, wenn die Zeitordnung auf die fermionischen Bausteine der normalgeordneten Tensorfeldblöcke in "fermionischer" Weise erweitert wird. Motto: Mit geschickt gewählten Bausteinen (2-Punktfunktionen) bekommt ein komplexes Gesamtobjekt (n-Punktfunktionen) einen übersichtlichen Bauplan. Seien F und G Spinorkomponenten von Ψ oder $\overline{\Psi}$. Dann wird definiert: $T(F(x), G(y)) = F(x)G(y)$ für $x^0 > y^0$, $T(F(x), G(y)) = -G(y)F(x)$ für $y^0 > x^0$ und $T(F(x), G(y)) = F(x)G(y) = -G(y)F(x)$ für $x^0 = y^0$. Es gilt mit dieser Definition

$$\begin{aligned} \langle \Omega, T(\Psi_\alpha(x), \overline{\Psi}_\beta(y)) \Omega \rangle &= -i \left(i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \kappa \delta_{\alpha\beta} \right) \Delta_F(x-y) =: i(S_F(x-y))_{\alpha\beta}, \\ S_F(x) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_V d^4k \frac{\gamma(k) + \kappa}{\langle k, k \rangle - \kappa^2 + i\varepsilon} \frac{e^{-i\langle k, x \rangle}}{(2\pi)^4}. \end{aligned}$$

Die Distribution S_F heißt "Feynmanpropagator des Diracquantenfeldes" und es gilt $(i\delta_x - \kappa) S_F = E_4 \cdot \delta^4$.

Der Feynmanpropagator ist also eine Fundamentallösung der Diracgleichung. Das Schema ist das folgende. Sei $i\partial_0\phi = h\phi$ die freie Diracevolutionsgleichung auf dem Hilbertraum \mathcal{H}_D zum s.a. Diracoperator $h = -i\gamma^0\gamma^l\partial_l + \kappa\gamma^0$. Dann folgt

$$(i\partial_0 - h) \left(\Theta(x^0) e^{-ihx^0} \gamma^0 \right) = i\delta(x^0) \gamma^0, \quad (i\partial_0 - h) \left(-\Theta(-x^0) e^{-ihx^0} \gamma^0 \right) = i\delta(x^0) \gamma^0.$$

Die Integralkerne $S_{ret}(x^0 e_0 + \mathbf{x})$ der V_0 -translationsinvarianten Operatoren $\mathcal{S}_{ret}(x^0) := -i\Theta(x^0) e^{-ihx^0} \gamma^0$ und $\mathcal{S}_{av}(x^0 e_0 + \mathbf{x})$ von $\mathcal{S}_{av}(x^0) := i\Theta(-x^0) e^{-ihx^0} \gamma^0$ definieren somit die retardierte und avancierte Fundamentallösung der freien Diracgleichung. Der Träger von \mathcal{S}_{ret} ist der Vorwärtslichtkegel, der von \mathcal{S}_{av} der Rückwärtslichtkegel. Für Feynmans Fundamentallösung S_F gilt mit $x = x^0 e_0 + \mathbf{x}$

$$S_F(x) = -i\Theta(x^0) \left(\sum_\varepsilon \int_{V_0} d\mu U_{\mathbf{k}, \varepsilon}(x + \mathbf{y}) \overline{U_{\mathbf{k}, \varepsilon}(\mathbf{y})} \right) + i\Theta(-x^0) \left(\sum_\varepsilon \int_{V_0} d\mu V_{\mathbf{k}, \varepsilon}(x + \mathbf{y}) \overline{V_{\mathbf{k}, \varepsilon}(\mathbf{y})} \right).$$

Somit ist $S_F(x^0 e_0 + \mathbf{x})$ der Integralkern von

$$\mathcal{S}_F(x^0) := \mathcal{S}_{ret}(x^0) \Theta(h) + \mathcal{S}_{av}(x^0) \Theta(-h).$$

Übrigens ist klar, dass

$$\langle \Omega, T(\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(y)) \Omega \rangle = \langle \Omega, T(\overline{\Psi}_\alpha(x), \overline{\Psi}_\beta(y)) \Omega \rangle = 0.$$

Das zeitgeordnete Produkt $T(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ eines n-tupels (lokaler) fermionischer Felder F_i , dh entweder $F_i = \Psi_\alpha$ oder $F_i = \overline{\Psi}_\beta$, ist analog definiert: Sei $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ bijektiv und so, dass $x_{\pi(1)}^0 \geq \dots \geq x_{\pi(n)}^0$, dann ist⁶

$$T(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \text{sgn}(\pi) \cdot F_{\pi(1)}(x_{\pi(1)}) \dots F_{\pi(n)}(x_{\pi(n)}).$$

⁵ Ein Diracquantenfeld Ψ geht bei sukzessiver viermaliger Drehung um jeweils 90° (bei gleicher Drehachse) in $-\Psi$ über, da die Liealgebra zu einer Darstellung der $SL_2(\mathbb{C})$ integriert.

⁶ Haben zwei der Argumente (x_1, \dots, x_n) dieselbe 0-Koordinate, dann ist die Permutation π nicht eindeutig bestimmt. Das zeitgeordnete Produkt $T(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ hängt aber nicht von der Auswahl von π ab.

Für die Vakuumerwartungswerte des zeitgeordneten Produktes $T(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ gilt die Wicks Kontraktionsformel

$$\langle \Omega, T(F_1(x_1), \dots, F_{2n}(x_{2n})) \Omega \rangle = \sum_{c \in K_n} \delta(c) \prod_{i=1}^n \langle \Omega, T(F_{c(0,i)}(x_{c(0,i)}), F_{c(1,i)}(x_{c(1,i)})) \Omega \rangle,$$

$$\langle \Omega, T(F_1(x_1), \dots, F_{2n}(x_{2n+1})) \Omega \rangle = 0.$$

Hier ist K_n wie im bosonischen Fall die Menge der aufsteigenden Kontraktionen von $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Die Zahl ist $\delta(c)$ das Vorzeichen der Permutation π , die $(1, 2, \dots, 2n)$ in $(c(0, 1), c(1, 1), c(0, 2), c(1, 2), \dots, c(0, n), c(1, n))$ überführt.