Schafft Dekohärenz Fakten?

Gebhard Grübl
Institut für Theoretische Physik, Universität Innsbruck
Notiz zur Vorlesung Grundprobleme der Quantentheorie, WS 00/01

$\mathcal{H}$ sei ein separabler Hilbertraum und $L(\mathcal{H})$ die Algebra der linear stetigen Abbildungen von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$. Ein Quantensystem („Teilchen") im Zustand mit dem Dichteoperator $\rho \in Z$ mit

$$Z := \{A \in L(\mathcal{H}) \mid A \geq 0, \quad Sp(A) = 1\}$$

durchläuft einen Apparat mit 2 Ausgängen, die mit 0 und 1 addressiert seien. $P \in \{A \in L(\mathcal{H}) \mid A^* = A\}$ sei die zugehörige Observable, die o.E. als Orthogonalprojektion angenommen wird. Die Wahrscheinlichkeit $W_P^\rho(\{1\})$, dass das Teilchen ρ den Apparat P durch den Ausgang 1 verlässt, gibt die QT mit

$$W_P^\rho(\{1\}) := Sp(\rho P)$$

an. W_P^ρ ist ein W-Maß auf $\{0,1\}$. Die Wahrscheinlichkeit $W_{P,Q}^\rho(\{(1,1)\})$, dass das Teilchen den Apparat P durch den Ausgang 1 und dann einen weiteren binären Apparat mit der zugehörigen Orthogonalprojektion Q ebenfalls durch den Ausgang 1 verlässt, gibt die QT mit

$$W_{P,Q}^\rho(\{(1,1)\}) := Sp(P\rho PQ) = Sp(QP\rho PQ)$$

an. $W_{P,Q}^\rho$ ist ein W-Maß auf $\{0,1\} \times \{0,1\}$. Analog ergibt sich für mehrere hintereinanderausgeführte Messungen von Orthogonalprojektionen $P_1, \ldots, P_n$ das P-Maß $W_{P_1,\ldots,P_n}^\rho$.

Für $Sp(\rho P) \neq 0$ gilt mit $\rho_P := P\rho P / Sp(\rho P) \in Z$

$$Sp(P\rho PQ) = Sp(\rho P) \cdot Sp(\rho_P Q)$$

und somit

$$W_{P,Q}^\rho(\{(1,1)\}) = W_P^\rho(\{1\}) \cdot W_Q^{\rho_P}(\{1\}). \tag{1}$$

Gleichung (1) kann so interpretiert werden: Bei der Messung von P an ρ findet das Ereignis $\{1\}$ mit der Wahrscheinlichkeit $W_P^\rho(\{1\}) > 0$ statt. Dabei entsteht der neue Zustand $\rho_P \in Z$. An diesem Zustand ρ_P wird dann Q gemessen, wobei das Ereignis $\{1\}$ die Wahrscheinlichkeit $W_Q^{\rho_P}(\{1\})$ hat. Die Zustandsänderung von ρ auf ρ_P wird als Quantensprung oder auch als Zustandsreduktion bezeichnet.

Nun ein kleiner Einschub über bedingte Wahrscheinlichkeit. Sei Ω eine endliche Menge und W ein W-Maß auf $pot\,(\Omega)$. Für $A \subset \Omega$ mit $W\,(A) > 0$ ist das von A bedingte W-maß W_A durch

$$W_A\,(B) := W\,(A \cap B)\,/W\,(A)$$

für alle $B \subset \Omega$ definiert. Steht in einem durch W beschriebenen Zufallsexperiment fest, dass das Ereignis A eingetreten ist, dann hat das Ereignis B die Wahrscheinlichkeit $W_A\,(B)$. Es gilt $W_A\,(B) \geq W\,(A \cap B)$. Mit $\alpha := W\,(A)$ und $A' := \Omega \setminus A$ gilt weiter

$$W = \alpha W_A + (1-\alpha)\,W_{A'}. \tag{2}$$

W ist also eine Mischung des W-maßes W_A, in dem das Ereignis A sicher ist, und einem, in dem das Komplementärereignis A' sicher ist. Mit der Feststellung, dass A eingetreten ist, reduziert sich W zu W_A. Mit der Feststellung, dass A nicht eingetreten ist, reduziert sich W zu $W_{A'}$.

Frage: Ist die Zustandsreduktion von ρ zu ρ_P analog zur Reduktion von W zu W_A in einem Kolmogorovmodell? Die StandardQT meint mit dieser Frage eigentlich die folgende. Ergibt der Zustand ρ in Analogie zu Gleichung (2) dieselben Wahrscheinlichkeiten wie die Mischung der beiden reduzierten Zustände, die bei einer P-Messung entstehen können? Die Antwort ist Nein. Warum?

1. Die Menge Z der Dichteoperatoren ist konvex, d.h. für alle $\rho_1, \rho_2 \in Z$ und für alle $\alpha \in [0,1]$ gilt $\rho := \alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2 \in Z$. Ist P eine Orthogonalprojektion, dann folgt:

   $$W_P^\rho = \alpha W_P^{\rho_1} + (1-\alpha) W_P^{\rho_2}.$$

   Die Mischung von Dichteoperatoren bewirkt eine entsprechende Mischung der zugehörigen W-Maße.

2. Mit $P' := id - P$ und den beiden reduzierten Dichteoperatoren

$$\rho_1 := P\rho P/Sp(\rho P), \quad \rho_2 := P'\rho P'/Sp(\rho P'),$$

die bei einer Messung von P an ρ entstehen können, folgt für $\alpha := Sp(\rho P) \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \rho &= (P+P')\rho(P+P') \\ &= P\rho P + P'\rho P' + P\rho P' + P'\rho P \\ &= \alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2 + M. \end{aligned}$$

Hier ist $M := P\rho P' + P'\rho P$. Der Zustand ρ ist also i.A. keine Mischung der reduzierten Zustände ρ_1 bzw. ρ_2, an denen die Messung von P die Werte 1 bzw. 0 streuungsfrei liefert. Es gilt zwar $W_P^\rho = \alpha W_P^{\rho_1} + (1-\alpha)W_P^{\rho_2}$, sodass eine Messung von P zwischen ρ und $\alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2$ nicht unterscheiden kann, für eine allgemeine mit P nicht kommutierende Orthogonalprojektion Q gilt jedoch

$$W_Q^\rho(\{1\}) = \alpha W_Q^{\rho_1}(\{1\}) + (1-\alpha)W_Q^{\rho_2}(\{1\}) + Sp(QM).$$

Und der „Interferenzterm" $Sp(QM)$ ist nicht notwendig gleich 0. Es gilt also i.A.

$$W_Q^\rho(\{1\}) \neq \alpha W_Q^{\rho_1}(\{1\}) + (1-\alpha)W_Q^{\rho_2}(\{1\}).$$

3. Für alle Orthogonalprojektionen Q mit $Sp(QM) = 0$, ist das p-Maß W_Q^ρ eine konvexe Summe der p-Maße $W_Q^{\rho_1}$ und $W_Q^{\rho_2}$. Die Messung von Q kann ρ nicht von $\alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2$ unterscheiden, denn es gilt

$$W_Q^\rho(\{1\}) = \alpha W_Q^{\rho_1}(\{1\}) + (1-\alpha)W_Q^{\rho_2}(\{1\}).$$

Die Messwahrscheinlichkeiten für Q werden durch eine vorhergehende Messung von P nicht gestört. Das folgende Lemma zeigt, dass diese Situation immer dann vorliegt, wenn P mit Q kommutiert.

Lemma 1 *Aus $[P,Q] = 0$ folgt $Sp(QM) = 0$.*

Proof. Es gilt

$$\begin{aligned} Sp(QM) &= Sp\left(QP\rho P'\right) + Sp\left(QP'\rho P\right) \\ &= Sp\left(PQ\rho P'\right) + Sp\left(P'Q\rho P\right) \\ &= Sp\left(Q\rho P'P\right) + Sp\left(PP'Q\rho\right). \end{aligned}$$

Aus $P'P = (id - P)\,P = P - P^2 = 0$ und $PP' = 0$ folgt nun die Behauptung. ■

Folgerung: Sind an einem Zustand ρ nur die Elemente aus einer Menge $\Pi = \{P, Q, S, ..\}$ miteinander kommutierender Orthogonalprojektionen messbar, dann können sich diese Messungen gegenseitig nicht stören. Sei $(e_i)_{i\in I}$ eine ONB von $\mathcal{H}$ aus simultanen Eigenvektoren aller Elemente von Π, und sei $\rho_\Pi := \sum_{i\in I} \langle e_i, \rho e_i\rangle\, e_i \langle e_i, \cdot\rangle$. Der Zustand ρ_Π ist eine konvexe Summe von reinen Zuständen $\rho_i := e_i \langle e_i, \cdot\rangle$, die allen Elementen von Π streuungsfreie Werte geben. Dann gilt für alle $P_i \in \Pi$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$W^\rho_{P_1,\ldots,P_n} = W^{\rho_\Pi}_{P_1,\ldots,P_n}.$$

(Man berechne die Spur mittels der Eigenvektorbasis $(e_i)_{i\in I}$.) Man ist versucht zu denken, dass ein einzelnes System im Zustand ρ sich eigentlich in einem der Zustände ρ_i befindet.

Die Analyse realistischer Messprozeduren an Quantensystemen mit makroskopisch vielen Freiheitsgraden macht plausibel, dass alle tatsächlich messbaren Orthogonalprojektionen (for all practical purposes oder kurz "FAPP") *näherungsweise* miteinander kommutieren. Unter diesen zu Π eingeschränkten Experimentiermöglichkeiten zeigt ρ_Π eine Analogie zu den Zuständen der klassischen statistischen Physik: ρ_Π ist eine konvexe Kombination von reinen Zuständen $\rho_i := e_i \langle e_i, \cdot\rangle$, in denen alle praktisch durchführbaren Messungen streuungsfreie Werte liefern; die W-Maße $W_X^{\rho_i}$ sind ja für alle $X \in \Pi$ Punktmaße. Es gilt mit $\alpha_i := \langle e_i, \rho e_i\rangle$ für alle $X \in \Pi$

$$W_X^\rho \approx W_X^{\rho_\Pi} = \sum_{i\in I} \alpha_i W_X^{\rho_i}.$$

Manche Protagonisten dieser Analyse realistischer makroskopischer Messprozeduren glauben, dass dieses sogenannte Dekohärenzprogramm die Tatsache erkläre, dass die makroskopische Welt definierte Eigenschaften besitzt. Sie glauben die Lösung des Problems gefunden zu haben, das Schrödinger mit seiner Katze hatte. Bell hält dagegen:

1. Der Rückzug auf „praktisch Durchführbares" schleppt unpräzise formulierte Näherungen in das Gerüst der Grundprinzipien der Quantentheorie ein. Grundprinzipien sollten ohne „näherungsweise" und ohne "FAPP" formuliert werden.

2. Ist ρ der Zustand der Welt, dann ist ρ der Zustand eines Einzelsystems. Mit der Approximation von ρ durch ρ_Π und der Deutung von ρ_Π als statistisches Ensemble von Welten in den Zuständen ρ_i wird stillschweigend auch ρ zur Ensemblegröße umgedeutet. Es werden also qualitativ gänzlich verschiedene Größen miteinander (annähernd) gleichgesetzt.

Literatur: J. S. Bell, *"Against measurement"*, Phys. World, Okt. 1991