1 Relativistische Zustandsreduktion[1]

Zustandspräparation, Zustandsreduktion, Wigners Formel, Lokalität, Einsteinkausalität,...

Seien M und N beschränkte, offene Teilmengen des Minkowskiraums. $\mathfrak{A}(M)$ und $\mathfrak{A}(N)$ seien die zugehörigen lokalen Observablenalgebren einer relativistischen Quantenfeldtheorie. $\mathfrak{A}(M)$ etwa enthält alle in M messbaren beschränkten Observablen. Die *Lokalität* einer relativistischen Quantenfeldtheorie besteht in der Tatsache, dass für zueinander raumartig gelegene Gebiete M und N für alle $A \in \mathfrak{A}(M)$ und für alle $B \in \mathfrak{A}(N)$ die Kommutativität $[A, B] = 0$ gilt. Man sagt dann weiter, dass für $A = A^* \in \mathfrak{A}(M)$ und $B = B^* \in \mathfrak{A}(N)$ die Relation $[A, B] = 0$ bewirke, dass eine Messung von A eine Messung von B nicht „störe".[2] Damit diese Rede eine Rechtfertigung im Formalismus hat, muss dieser Regeln enthalten, die festlegen, wie sich (raumzeitlich lokalisierte) Messungen in einer relativistischen Quantentheorie abhängig von der Lage ihrer Lokalisierungsgebiete überhaupt gegenseitig beeinflussen oder „stören" können.

Erinnern wir uns zunächst an die Vorstufe dieser Problematik innerhalb der nichtrelativistischen Quantentheorie. Dort wird die Störung einer Messung durch eine andere folgendermaßen beschrieben. Sei $\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein Dichteoperator; er repräsentiert im Schrödingerbild den momentanen Systemzustand. Es gilt also: ρ ist linear stetig mit $\rho \geq 0$ und $Sp\,(\rho) = 1$. Die linear stetige Abbildung $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sei eine Orthogonalprojektion. Es gilt also $P^* = P = P^2$. Die komplementäre Projektion $id_{\mathcal{H}} - P$ wird mit P' bezeichnet. P legt die Wahrscheinlichkeiten der zwei Ausgänge eines „binären" Experiments fest. Man bezeichnet für gewöhnlich etwas irreführend dieses Experiment als Messung von P. Dieser Jargon wird in der Folge der Kürze halber benutzt. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von P am Zustand ρ den Wert 1 zu erhalten, hat den Wert $W^P(\{1\}) := Sp\,(\rho P)$. Für die Wahrscheinlchkeit des komplementären Ereignisses $\{0\}$ gilt

$$W^P(\{0\}) = 1 - W^P(\{1\}) = W^{P'}(\{1\}).$$

W^P ist also ein W-maß auf $\{0, 1\}$. Welche Wahrscheinlichkeiten sind mit zeitlich aufeinanderfolgenden Messungen von Orthogonalprojektionen verknüpft?

Falls $Sp\,(\rho P) > 0$, dann entsteht bei einer (idealen) Messung von P am Zustand ρ und bei Eintreten des Wertes 1 aus dem Zustand ρ der „reduzierte" Zustand

$$\rho^P := \frac{1}{Sp\,(\rho P)} P \rho P.$$

Diese *Zustandsreduktion* stellt im mathematischen Bild den Vorgang der *Zustandspräparation* dar. Sie ermöglicht im Fall von $\dim P\,(\mathcal{H}) = 1$ die gezielte Erzeugung reiner Zustände.

Sei $Q : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eine weitere Orthogonalprojektion. Der Zustand ρ liege zur Zeit $t = 0$ vor. Dann werde zur Zeit $s > 0$ die Projektion P gemessen. Danach werde zur Zeit $t > s$ die Projektion Q gemessen. Die Evolution zwischen den Messungen sei unitär und vom Typ e^{-iHt}. Die Projektion P wird also am Zustand $\rho_s := e^{-iHs} \rho e^{iHs}$ gemessen. Diese Messung liefert den Wert 1 mit der Wahrscheinlichkeit $Sp\,(P\rho_s)$. Falls der Messwert 1 eintritt, entwickelt sich der reduzierte Zustand ρ_s^P bis zur Zeit t in den Zustand

$$\frac{e^{-iH(t-s)} P \rho_s P e^{iH(t-s)}}{Sp\,(\rho_s P)} = \frac{e^{-iHt} P(s) \rho P(s) e^{iHt}}{Sp\,(\rho_s P)}.$$

Hier ist $P(t) := e^{iHt} P e^{-iHt}$ der Heisenbergbildoperator zur Zeit t, der zum Schrödingerbildoperator P gehört. Das Ereignis, dass bei beiden Messungen P und Q jeweils der Messwert 1 eintritt, hat daher die Wahrscheinlichkeit

$$W_{s,t}^{P,Q}(\{1,1\}) = Sp\,(\rho_s P)\, Sp\left(Q \left(\rho_s^P\right)_{t-s}\right) = Sp\,(Q(t) P\,(s)\, \rho P\,(s)\, Q(t))\,.$$

Allgemeiner ergibt sich bei Vorliegen des Zustands ρ zur Zeit $t = 0$ und bei Messungen von Orthogonalprojektionen mit den Heisenbergbildoperatoren $P_1, \ldots, P_n$ zu den Zeiten $0 < t_1 < \ldots < t_n$ der Ereignisraum $\{0,1\}^n$ mit dem W-maß $W^{P_1,\ldots,P_n}$, für das

$$W^{P_1,\ldots,P_n}\left(\{(1,\ldots,1)\}\right) = Sp\,(P_n \ldots P_1 \rho P_1 \ldots P_n)$$

[2] zB: Itzykson & Zuber, p. 118, "..measurements at spacelike separations do not interfere."
Streater Wightman, p. 132, " ..dass Feldmessungen vertauschbar sein sollten, wenn sie an Punkten ausgeführt werden, die raumartig getrennt sind."
Haag, p. 107, "Axiom E ...Two observables associated with space-like separated regions are compatible. The measurement of the one does not disturb the measurement of the other. The operators representing these observables must commute."

gilt. (Die in den Heisenbergbildoperatoren impliziten Messzeiten werden nicht mehr notiert.) Mit der Bezeichnung $P^\varepsilon = P$ für $\varepsilon = 1$ und $P^\varepsilon = P'$ für $\varepsilon = 0$ gilt für ein allgemeines Elementarereignis $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ *Wigners Formel*

$$W^{P_1,\ldots,P_n}\left(\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\}\right) = Sp\left(P_n^{\varepsilon_n}\ldots P_1^{\varepsilon_1}\rho P_1^{\varepsilon_1}\ldots P_n^{\varepsilon_n}\right).$$

Sei nun $n = 2$ und $P_1 = P$ und $P_2 = Q$. Falls $[P,Q] = 0$, dann folgt $W^{P,Q}(\{0,1\}\times\{1\}) = W^Q(\{1\})$. Dies ergibt sich so

$$\begin{aligned} W^{P,Q}(\{0,1\}\times\{1\}) &= Sp\,(QP\rho PQ) + Sp\,(QP'\rho P'Q) \\ &= Sp\,(PQ\rho QP) + Sp\,(P'Q\rho QP') \\ &= Sp\,(PQ\rho Q) + Sp\,(P'Q\rho Q) \\ &= Sp\,((P+P')\,Q\rho Q) \\ &= Sp\,(Q\rho Q) \\ &= W^Q(\{1\}). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Wert 1 bei der Messung von Q ist also unabhängig davon, ob davor P gemessen wurde oder nicht. Deshalb sagt man, dass für $[P,Q] = 0$ die Messung von P jene von Q nicht störe.

Frage: Lässt sich Wigners Formel in die relativistische Quantenfeldtheorie übertragen? Zwei Hürden werden sofort sichtbar. 1) Im Heisenbergbild einer relativistischen Quantenfeldtheorie gibt es i.A. keine Observablen zu scharf definierten Zeiten. Observable sind in offenen Raumzeitgebieten lokalisiert. Die Wickmonome eines freien Quantenfeldes, wie etwa $:\Phi^n:$ zum Klein-Gordonfeld Φ, ergeben erst nach raumzeitlicher Verschmierung mit Testfunktionen $f \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^4\right)$ lokalisierte Operatoren. 2) Weiters gibt es im Minkowskiraum kein lorentzinvariantes „früher" und „später", wie es für Wigners Formel entscheidend ist.

Im folgenden werden einige heute kursierenden Teilantworten auf obige Frage beschrieben. Dabei werden mehrere Fälle, je nach Lage der beschränkten, offenen Teilmengen M und N des Minkowskiraumes unterschieden. Der Heisenbergbildzustand ρ liege auf einer Gleichzeitigkeitsfläche F vor. F habe nichtleeren Durchschnitt mit jedem von M und jedem von N ausgehenden Rückwärtslichtkegel. Orthogonalprojektionen $P \in \mathfrak{A}(M)$ und $Q \in \mathfrak{A}(N)$ werden gemessen.[3] Welche Wahrscheinlichkeit $W^{P,Q}(\{(\varepsilon,\eta)\})$ hat das Ereignis „Die Messung von P ergibt den Wert ε und die Messung von Q den Wert η"?

1. Der Durchschnitt von N mit der Vereinigung aller von M ausgehenden Lichtkegel sei leer, d.h. M und N sind *raumartig* zueinander. Vermutlich lautet die Antwort, dass

$$W^{P,Q}(\{(\varepsilon,\eta)\}) = Sp\,(Q^\eta P^\varepsilon \rho P^\varepsilon Q^\eta). \tag{1}$$

   Es gilt dann wegen der Lokalitätseigenschaft der relativistischen QFT $[P,Q] = 0$, sodass

$$W^{P,Q}(\{(\varepsilon,\eta)\}) = W^{Q,P}(\{(\eta,\varepsilon)\}).$$

   Daher wird keine Ordnung der Operatoren P und Q in Wigners Formel benötigt. Überdies folgt die eingangs erwähnte Rede: *Die Messung von P stört die Wahrscheinlichkeit der Werte von Q nicht*, denn

$$W^Q(\eta) := Sp\,(\rho Q^\eta) = W^{P,Q}(\{0,1\}\times\{\eta\}).$$

2. N liege im Durchschnitt der von M ausgehenden Vorwärtslichtkegel, d.h. $N \subset \bigcap_{x\in M} V_x^+$. Aus jedem Punkt von M kann jeder Punkt von N mit einem Signal erreicht werden. Damit ist eine lorentzinvariante zeitliche Ordnung zwischen M und N gegeben. N ist in der Zukunft aller Punkte von M. Damit erscheint Gleichung (1) plausibel. Es gilt wegen $[P,Q] \neq 0$, dass im allgemeinen $W^{P,Q}(\{(\varepsilon,\eta)\}) \neq W^{Q,P}(\{(\eta,\varepsilon)\})$, was wegen der eindeutigen zeitlichen Ordnung zwischen P und Q kein Problem darstellt. Weiters existieren P, Q, ρ mit

$$W^Q(\eta) \neq W^{P,Q}(\{0,1\}\times\{\eta\}).$$

   Die Messwahrscheinlichkeiten von Q werden durch eine Messung von P beeinflusst.

[3] Vermutlich ist $\Theta(\Phi[f])$ für $f \in \mathcal{D}$ mit $f = 0$ außerhalb von M eine Orthogonalprojektion in $\mathfrak{A}(M)$.

3. N hat leeren Durchschnitt mit der Vereinigung $\bigcup_{x\in M} V_x^- =: V_M^-$ aller von M ausgehenden Rückwärtslichtkegel, d.h. $N \cap V_M^- = \{\}$. Aus keinem Punkt von N aus kann ein Punkt von M mit einem Signal erreicht werden. Dann ist Gleichung (1) eine Verallgemeinerung der Fälle 1) und 2) und ist äquivalent zur Aussage: Die Reduktion von ρ zu ρ^P findet am Rand von V_M^- statt. Diese Form der relativistischen Zustandsreduktion wurde von Hellwig und Kraus [1] vorgeschlagen.

Diese drei Fälle sind natürlich keine erschöpfenden Alternativen für die Lage von zwei Raumzeitgebieten. Man denke etwa an $M = N$.

Sorkin machte in [2] auf die folgende Konsequenz der unter 3. gegebenen Antwort aufmerksam. Seien M, N, O beschränkte, offene Teilmengen des Minkowskiraumes, mit den Orthogonalprojektionen $P \in \mathfrak{A}(M), Q \in \mathfrak{A}(N)$ und $R \in \mathfrak{A}(O)$. Für die Mengen M, N, O gelte $N \cap V_M^+ \neq \{\}$, $N \cap V_M^- = \{\}$, $O \cap V_N^+ \neq \{\}$ und $O \cap V_N^- = \{\}$. Weiter sei O raumartig zu M. Daher gilt $[P, R] = 0$. I.A. gilt jedoch $[P, Q] \neq 0$ und $[Q, R] \neq 0$. Unterstellt man gemäß Antwort 3., dass

$$W^{P,Q,R}(\{(a, b, c)\}) = Sp\left(R^c Q^b P^a \rho P^a Q^b R^c\right),$$

dann existieren P, Q, R und ρ mit $[P, QR] \neq 0$, sodass

$$W^{P,Q,R}(\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{c\}) \neq W^{Q,R}(\{0, 1\} \times \{c\}).$$

Die in O ablesbaren Messwahrscheinlichkeiten von R unterscheiden sich in den beiden Situationen: (i) P, Q und R werden gemessen; (ii) Q und R werden gemessen, nicht aber P.

In O ist somit feststellbar, ob in M gemessen wurde oder nicht. Aber M ist raumartig zu O. Damit scheint die Zustandsreduktion am Rande des vom Messgebiet M ausgehenden Rückwärtslichtkegelschattens das Prinzip der *Einsteinkausalität* zu verletzen. Dieses Prinzip sagt, dass es innerhalb des Gebietes M unmöglich ist, kausal geregelte Größen in O zu beeinflussen.

Literatur:

[1] K.-E. Hellwig, K. Kraus, *Formal description of measurement in local quantum field theory*, Phys. Rev. **D1** (1970) 566-571

[2] R D Sorkin in: *Directions in general relativity*, Vol II, B L Hu and T A Jacobson (Eds), CUP, 1993 oder auch gr-qc/9302018v2