1 Das relativistische Gesamtmassenspektrum

Zerfällt ein Teilchen der Masse M in n Teilchen der Massen $m_1, \ldots, m_n$, dann gilt für die Energie des zerfallenden Teilchens in seinem Ruhsystem $E = Mc^2$. Diese Energie verteilt sich auf die Energien der Zerfallsprodukte $E_i \geq m_i c^2$. Es gilt also $Mc^2 = \sum_i E_i \geq \sum_i m_i c^2$ und somit die Abschätzung $M \geq m_1 + \ldots + m_n$. Seien nun beliebige positive reelle Zahlen $M, m_1, \ldots, m_n$ mit $M \geq m_1 + \ldots + m_n$ gegeben, und sei P ein Energie-Impulsvektor eines Teilchens mit der Masse M. Frage: Existieren Energie-Impulsvektoren $p_1, \ldots, p_n$ von n Teilchen mit den Massen $m_1, \ldots, m_n$, sodass $P = p_1 + \ldots + p_n$ gilt? Antwort: Ja. Es folgt der Beweis.

V bezeichne den $\mathbb{R}^4$ mit dem minkowskischen inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, für das gilt

$$\langle x, y \rangle = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^{3} x^i y^i = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Weiter sei $V_+ := \left\{ x \in V \mid \langle x, x \rangle > 0, x^0 > 0 \right\}$ das Innere des Vorwärtslichtkegels (in 0). Die Menge $V_+^\kappa := \left\{ x \in V \mid \langle x, x \rangle = \kappa^2, x^0 > 0 \right\} \subset V$ für $\kappa > 0$ heißt obere Massenschale zur Masse κ. Aus der relativistischen Punktmechanik wird als bekannt vorausgesetzt: Der Energie-Impulsvektor $p = (E/c, \mathbf{p})$ eines relativistischen Teilchens der Masse m liegt in V_+^{mc}.

Lemma 1 *V_+ ist abgeschlossen unter der Addition, d.h. für alle $x, y \in V_+$ gilt $x + y \in V_+$.*

Beweis. Seien $x, y \in V_+$. Abkürzung $\kappa^2 := \langle x, x \rangle > 0$ und $\rho^2 := \langle y, y \rangle > 0$. Es folgt

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \langle x, y \rangle = \kappa^2 + \rho^2 + 2 \left(x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \right).$$

Sei der Winkel $\theta \in [0, \pi]$ so, dass $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} =: |\mathbf{x}| \, |\mathbf{y}| \cos \theta$. Wegen $x^0 = \sqrt{\kappa^2 + |\mathbf{x}|^2}$ und $y^0 = \sqrt{\kappa^2 + |\mathbf{y}|^2}$ folgt dann

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y \rangle &= \kappa^2 + \rho^2 + 2 \left(\sqrt{\kappa^2 + |\mathbf{x}|^2} \sqrt{\kappa^2 + |\mathbf{y}|^2} - |\mathbf{x}| \, |\mathbf{y}| \cos \theta \right) \\ &> \kappa^2 + \rho^2 + 2 \, |\mathbf{x}| \, |\mathbf{y}| \, (1 - \cos \theta) \geq \kappa^2 + \rho^2. \end{aligned}$$

Somit gilt $\langle x + y, x + y \rangle > \kappa^2 + \rho^2 > 0$. Mit $x^0 > 0$ und $y^0 > 0$ gilt natürlich auch $(x + y)^0 = x^0 + y^0 > 0$. Somit ist gezeigt, dass $x + y \in V_+$. ■

Der vorige Beweis lehrt, dass die Menge $\mathcal{M}(m_1, m_2)$ aller Massen M eines Zweiteilchensystems mit den Konstituentenmassen m_1 und m_2 durch die folgende Abschätzung nach unten beschränkt ist: $M > \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$. Für $m_1 = 3\,\mathrm{u}$ und $m_2 = 4\,\mathrm{u}$ folgt also $M > 5\,\mathrm{u}$.

Wir zeigen nun, dass die untere Schranke $\sqrt{m_1^2 + m_2^2}$ zur größeren unteren Schranke $m_1 + m_2 = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2 m_1 m_2} > \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$ verschärft werden kann. (Im oben gedachten Fall mit $m_1 = 3\,\mathrm{u}$ und $m_2 = 4\,\mathrm{u}$ folgt dann die Abschätzung $M \geq 7\,\mathrm{u}$.) Die verschärfte Ungleichung gibt die größte untere Schranke an die Menge $\mathcal{M}(m_1, m_2)$, denn es gilt $m_1 + m_2 = \inf \mathcal{M}(m_1, m_2)$. Siehe Satz 3.

Lemma 2 *Seien $x \in V_+^\kappa$ und $y \in V_+^\rho$ mit $\kappa, \rho \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt*

$$\langle x + y, x + y \rangle \geq (\kappa + \rho)^2.$$

Beweis. Nach Lemma 1 gilt $x + y \in V_+$ und daher $\langle x + y, x + y \rangle = M^2$ für ein $M > 0$. Damit liegt $x + y$ am Gruppenorbit des Vektors $(M, \mathbf{0})$ unter der eigentlichen Lorentzgruppe $L_+^\uparrow$. Es existiert somit ein $\lambda \in L_+^\uparrow$ mit $\lambda((M, \mathbf{0})) = x + y$. ($\lambda^{-1}$ vermittelt somit den Übergang in das Schwerpunktsystem der beiden Energie-Impulsvektoren x und y.) Folglich existiert ein Vektor $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\lambda^{-1} x = \left(\sqrt{\kappa^2 + |\mathbf{x}^*|^2}, \mathbf{x}^* \right) \text{ und } \lambda^{-1} y = \left(\sqrt{\rho^2 + |\mathbf{x}^*|^2}, -\mathbf{x}^* \right).$$

Aus der Lorentzinvarianz von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ folgt

$$\begin{aligned}\langle x+y,x+y\rangle &= \left\langle\lambda^{-1}(x+y),\lambda^{-1}(x+y)\right\rangle \\ &= \left\langle\lambda^{-1}x+\lambda^{-1}y,\lambda^{-1}x+\lambda^{-1}y\right\rangle = \\ &= \left(\sqrt{\kappa^2+|\mathbf{x}^*|^2}+\sqrt{\rho^2+|\mathbf{x}^*|^2}\right)^2 \\ &\geq (\kappa+\rho)^2.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Die Aussage des Satzes kann verdichtet werden zu $V_+^\kappa+V_+^\rho\subseteq\bigcup_{M\geq\kappa+\rho}V_+^M$.

Satz 3 *Seien $\kappa,\rho\in\mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt $V_+^\kappa+V_+^\rho=\bigcup_{M\geq\kappa+\rho}V_+^M$.*

Beweis. Sei $x\in\mathbb{R}^3$. Für das spezielle Paar von Vektoren

$$x=\left(\sqrt{\kappa^2+|\mathbf{x}|^2},\mathbf{x}\right)\in V_+^\kappa \text{ und } y=\left(\sqrt{\rho^2+|\mathbf{x}|^2},-\mathbf{x}\right)\in V_+^\rho$$

gilt dann

$$\langle x+y,x+y\rangle=\left(\sqrt{\kappa^2+|\mathbf{x}|^2}+\sqrt{\rho^2+|\mathbf{x}|^2}\right)^2.$$

Für die Abbildung

$$f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\left[(\kappa+\rho)^2,\infty\right),\quad \lambda\mapsto\left(\sqrt{\kappa^2+\lambda}+\sqrt{\rho^2+\lambda}\right)^2$$

gilt also $\langle x+y,x+y\rangle=f\left(|\mathbf{x}|^2\right)$. Wir zeigen nun, dass f surjektiv ist: f ist differenzierbar und es gilt (nachrechnen!) $f'(\lambda)>0$. Die Funktion f ist also streng monoton wachsend, stetig und unbeschränkt. Weiter gilt $f(0)=(\kappa+\rho)^2$. Somit nimmt f jeden Wert $\geq(\kappa+\rho)^2$ an. ■

Wir berechnen nun noch den Wert λ mit $f(\lambda)=M^2\geq(\kappa+\rho)^2$. Es gilt

$$f(\lambda)=\kappa^2+\rho^2+2\lambda+2\sqrt{(\kappa^2+\lambda)(\rho^2+\lambda)}.$$

Dann ergibt $f(\lambda)=M^2$ durch Freimachen der Wurzel und Quadrieren

$$4\left(\kappa^2+\lambda\right)\left(\rho^2+\lambda\right)=\left(M^2-\left(\kappa^2+\rho^2\right)-2\lambda\right)^2.$$

Dazu äquivalent ist

$$4\kappa^2\rho^2=\left(M^2-\left(\kappa^2+\rho^2\right)\right)^2-4\lambda M^2.$$

Der gesuchte Wert λ ist somit gegeben durch

$$\lambda=\frac{\left(M^2-\left(\kappa^2+\rho^2\right)\right)^2-4\kappa^2\rho^2}{4M^2}. \tag{1}$$

Wegen $M^2\geq(\kappa+\rho)^2$ folgt für $4M^2\lambda$ die Abschätzung

$$4M^2\lambda=\left(M^2-\left(\kappa^2+\rho^2\right)\right)^2-4\kappa^2\rho^2\geq\left((\kappa+\rho)^2-\left(\kappa^2+\rho^2\right)\right)^2-4\kappa^2\rho^2=0,$$

die $\lambda\geq 0$ sicher stellt. Zu jedem $M\geq\kappa+\rho$ existieren somit auch Vektoren $x\in V_+^\kappa$ und $y\in V_+^\rho$ mit $\langle x+y,x+y\rangle=M^2$. Damit haben wir das folgende für Speicherringexperimente relevante Korollar.

Korollar 4 *Zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 und dem Gesamtimpuls* **0** *haben genau dann die Gesamtenergie Mc^2, wenn für die Impulse $\pm\mathbf{p}$ der beiden Teilchen gilt, dass*

$$|\mathbf{p}|=\frac{c}{2M}\sqrt{\left(M^2-(m_1^2+m_2^2)\right)^2-(2m_1m_2)^2}.$$

Durch Induktion nach n zeigt man schließlich den folgenden Satz.

Satz 5 *Seien $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt*

$$V_+^{\kappa_1} + \ldots + V_+^{\kappa_n} = \bigcup_{M \geq \kappa_1 + \ldots + \kappa_n} V_+^M.$$