Endlichdimensionale Darstellungen der CAR

Gebhard Grübl
Institut für Theoretische Physik der Universität Innsbruck
Notiz zur Vorlesung Quantenfeldtheorie, SO 2005

Definition 1 *Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Vektorraum mit* $\dim(\mathcal{H}) < \infty$ *und Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Weiter seien* $a_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *für* $i \in \{1, \ldots m\}$ *lineare Abbildungen mit* $\{a_i, a_j\} = 0$ *und* $\{a_i, a_j^*\} = \delta_{ij} \cdot id$. *Die Folge* $(a_i)_{i=1}^m$ *heißt (endlichdimensionale) Darstellung der kanonischen Antivertauschungsrelationen (CAR) von* m *Freiheitsgraden.*

Satz 2 *Ist* $(a_i)_{i=1}^m$ *eine Darstellung der CAR, dann sind* $a_i^* a_i$ *und* $a_i a_i^*$ *zueinander komplementäre Orthogonalprojektionen. Weiter gilt*

$$[a_i^* a_i, a_j] = -\delta_{ij} a_j, \quad [a_i^* a_i, a_j^*] = \delta_{ij} a_j^*, \quad [a_i a_i^*, a_j] = \delta_{ij} a_j, \quad [a_i a_i^*, a_j^*] = -\delta_{ij} a_j^*.$$

Beweis. Die Symmetrie von $a_i^* a_i$ ist klar. Aus $a_i^2 = 0$ folgt $a_i^* a_i a_i^* a_i = a_i^* \{a_i, a_i^*\} a_i = a_i^* a_i$. Damit ist $a_i^* a_i$ eine Orthogonalprojektion. Aus den CAR folgt für $i = j$, dass $a_i a_i^* = id - a_i^* a_i$. Somit ist $a_i a_i^*$ die komplementäre Orthogonalprojektion zu $a_i^* a_i$. Die Kommutatorrelationen folgen mittels

$$[AB, C] = ABC - CAB = ABC + ACB - ACB - CAB = A\{B, C\} - \{A, C\} B.$$

■

Ist $(a_i)_{i=1}^m$ eine Darstellung der CAR, dann ist offenbar auch $(b_i)_{i=1}^m$ mit $b_i := a_i^*$ eine Darstellung der CAR. Weitere Darstellungen der CAR ergeben sich aus $(a_i)_{i=1}^m$ durch die Bildung von geschickt gewählten komplexen Linearkombinationen

$$c_i := \sum\nolimits_{j=1}^m M_{ij} a_j + \sum\nolimits_{j=1}^m N_{ij} a_j^*$$

(„endliche Bogoljubovtransformation"). Für die Koeffizientenmatrizen $M, N \in \mathbb{C}^{m \times m}$ müssen bestimmte Produktrelationen gelten, damit auch $(c_i)_{i=1}^m$ eine Darstellung der CAR ist. Es gilt: $(c_i)_{i=1}^m$ ist eine Darstellung der CAR genau dann, wenn

$$MN^t + \left(MN^t\right)^t = 0 \text{ und } MM^* + NN^* = I_m.$$

Hierbei bezeichnet M^t die transponierte Matrix von M und M^* die transponierte und konjugiert komplexe Matrix von M und I_m die Einheitsmatrix in $\mathbb{C}^{m \times m}$.

Nun soll eine endlichdimensionale Darstellung der CAR von m Freiheitsgraden angeführt werden. Sei $(e_0, e_1) = \underline{e}$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^2$ und das Standardskalarprodukt sei gewählt. Sei $\mathcal{H}$ der Bildraum eines m-fachen Tensorprodukts von $\mathbb{C}^2$ mit sich selbst

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2$$

mit dem von $\mathbb{C}^2$ induzierten Skalarprodukt. Wähle als ONB B von $\mathcal{H}$ die Vektoren

$$\{e_{\omega_1} \otimes e_{\omega_2} \otimes \ldots \otimes e_{\omega_m} \mid \omega_1, \ldots \omega_m \in \{0, 1\}\}.$$

Für die Abbildung a_i gelte

$$M(a_i, B) = \sigma_3 \otimes \ldots \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_+ \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes I_2,$$

wobei die Matrix σ_+ an der i-ten Stelle steht, und

$$\sigma_+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt. Für a_i^* folgt daraus

$$M(a_i^*, B) = \sigma_3 \otimes \ldots \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_- \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes I_2$$

mit

$$\sigma_- := \sigma_+^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

an der i-ten Stelle. Für $m = 1$ gilt $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ und $M(a_1, \underline{e}) = \sigma_+$.

Satz 3 $(a_i)_{i=1}^m$ *ist eine Darstellung der CAR von m Freiheitsgraden.*

Beweis. Mit den Matrizen $M(a_i, B)$ und $M(a_i^*, B)$ sind die kanonischen Antivertauschungsrelationen direkt nachzurechnen. ■

Ein konstruktiver Weg zu dieser sogenannten Spindarstellung ist der folgende. Sei $\mathcal{H}$ ein 2^m dimensionaler komplexer Vektorraum, d.h. die Elemente von $M := \{0,1\}^m$ lassen sich bijektiv auf jede Basis von $\mathcal{H}$ abbilden. Nach Wahl einer solchen Basis B und einer solchen Abbildung kann jedes Element dieser Basis mit genau einem $\omega \in M$ addressiert werden. Wir notieren die Basis als $B = \{e_\omega \mid \omega \in M\}$. Ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist durch die Vorgabe, dass B eine Orthonormalbasis ist, eindeutig festgelegt. Für alle $\psi \in \mathcal{H}$ existiert somit genau eine Folge $(\psi^\omega)_{\omega \in M}$ in $\mathbb{C}$ mit

$$\psi = \sum\nolimits_{\omega \in M} \psi^\omega e_\omega,$$

und für das Skalarprodukt zweier Vektoren ψ und ϕ gilt

$$\langle \psi, \phi \rangle = \sum\nolimits_{\omega \in M} \overline{\psi^\omega} \phi^\omega.$$

Eine lineare Abbildung $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist durch die Vorgabe von $A(e_\omega)$ für alle $\omega \in M$ eindeutig festgelegt.

Definition 4 *Für $i \in \{1, \ldots m\}$ sei $a_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ die lineare Abbildung, für die*

$$a_i(e_\omega) = \delta_1(\omega_i) \left(\prod\nolimits_{k=1}^{i-1} (-1)^{\omega_k} \right) e_{(\omega_1, \ldots \omega_{i-1}, 0, \ldots \omega_m)}$$

für alle $\omega \in M$ gilt. Notation: $\deg_{i-1}(\omega) := \left(\prod\nolimits_{k=1}^{i-1} (-1)^{\omega_k} \right) \in \{1, -1\}$ *und $\delta_1(\omega_i) := 1$ für $\omega_i = 1$ und $\delta_1(\omega_i) := 0$ für $\omega_i = 0$. Analog $\delta_0(\omega_i) := 1$ für $\omega_i = 0$ und $\delta_0(\omega_i) := 0$ für $\omega_i = 1$.*

Lemma 5 *Sei $i \in \{1, \ldots m\}$ und $\omega \in M$ und a_i^* die adjungierte Abbildung von a_i. Dann gilt*

$$a_i^*(e_\omega) = \delta_0(\omega_i) \deg_{i-1}(\omega) e_{(\omega_1, \ldots \omega_{i-1}, 1, \ldots \omega_m)}.$$

Beweis. Aus der Definition von a_i folgt

$$\begin{aligned} \langle e_\omega, a_i e_{\omega'} \rangle &= \deg_{i-1}(\omega') \delta_1(\omega_i') \left\langle e_{(\omega_1, \ldots \omega_m)}, e_{\left(\omega_1', \ldots \omega_{i-1}', 0, \ldots \omega_m'\right)} \right\rangle \\ &= \deg_{i-1}(\omega') \delta_1(\omega_i') \delta_0(\omega_i) \left\langle e_{(\omega_1, \ldots \omega_{i-1}, 0, \ldots \omega_m)}, e_{\left(\omega_1', \ldots \omega_{i-1}', 0, \ldots \omega_m'\right)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Definiere nun die lineare Abbildung $b_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch

$$b_i(e_\omega) = \deg_{i-1}(\omega) \delta_0(\omega_i) e_{(\omega_1, \ldots \omega_{i-1}, 1, \ldots \omega_m)}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \langle b_i e_\omega, e_{\omega'} \rangle &= \deg_{i-1}(\omega) \delta_0(\omega_i) \left\langle e_{(\omega_1, \ldots \omega_{i-1}, 1, \ldots \omega_m)}, e_{\omega'} \right\rangle \\ &= \deg_{i-1}(\omega) \delta_0(\omega_i) \delta_1(\omega_i') \left\langle e_{(\omega_1, \ldots \omega_{i-1}, 1, \ldots \omega_m)}, e_{\left(\omega_1', \ldots \omega_{i-1}', 1, \ldots \omega_m'\right)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt für alle $\psi, \phi \in \mathcal{H}$, dass

$$\langle \psi, a_i \phi \rangle = \langle b_i \psi, \phi \rangle.$$

Daraus folgt wiederum $b_i = a_i^*$ und somit die Behauptung. ■

Satz 6 *Es gilt* $\{a_i, a_j\} = 0$ *und* $\left\{a_i, a_j^*\right\} = \delta_{ij} \cdot id$ *für alle* $i, j \in \{1, \dots m\}$.

Beweis. Aus der Definition von a_i ist klar, dass $a_i a_i = 0$ und daher $\{a_i, a_i\} = 0$. Sei nun o.E.d.A. $i < j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_i a_j e_\omega &= a_i \deg_{j-1}(\omega)\, \delta_1(\omega_j)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{j-1}, 0, \dots \omega_m)} \\ &= \deg_{j-1}(\omega)\, \delta_1(\omega_j) \deg_{i-1}(\omega)\, \delta_1(\omega_i)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_{j-1}, 0, \dots \omega_m)}. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} a_j a_i e_\omega &= a_j \deg_{i-1}(\omega)\, \delta_1(\omega_i)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_m)} \\ &= \deg_{i-1}(\omega)\, \delta_1(\omega_i) \deg_{j-1}(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_m)\, \delta_1(\omega_j)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_{j-1}, 0, \dots \omega_m)}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\deg_{j-1}(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_m)\, \delta_1(\omega_j) = -\deg_{j-1}(\omega)\, \delta_1(\omega_j).$$

Für $i < j$ folgt daher, dass $\{a_i, a_j\}\, e_\omega = 0$ für alle $\omega \in M$. Nun zum Beweis von $\left\{a_i, a_j^*\right\} = \delta_{ij} \cdot id$. Sei zunächst $i = j$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_i a_i^* e_\omega &= a_i \deg_{i-1}(\omega)\, \delta_0(\omega_i)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 1, \dots \omega_m)} \\ &= \deg_{i-1}(\omega)\, \delta_0(\omega_i) \deg_{i-1}(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 1, \dots \omega_m)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_m)} \\ &= \delta_0(\omega_i)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_m)}. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} a_i^* a_i e_\omega &= a_i^* \deg_{i-1}(\omega)\, \delta_1(\omega_i)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_m)} \\ &= \deg_{i-1}(\omega)\, \delta_1(\omega_i) \deg_{i-1}(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_m)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 1, \dots \omega_m)} \\ &= \delta_1(\omega_i)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 1, \dots \omega_m)}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \{a_i, a_i^*\}\, e_\omega &= \delta_0(\omega_i)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_m)} + \delta_1(\omega_i)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 1, \dots \omega_m)} \\ &= e_\omega. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\{a_i, a_i^*\} = id$. Sei nun o.E.d.A. $i < j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_i a_j^* \omega &= a_i \delta_0(\omega_j) \deg_{j-1}(\omega)\, (\omega_1, \dots \omega_{j-1}, 1, \dots \omega_m) \\ &= \delta_0(\omega_j) \deg_{j-1}(\omega)\, \delta_1(\omega_i) \deg_{i-1}(\omega)\, (\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_{j-1}, 1, \dots \omega_m). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} a_j^* a_i e_\omega &= a_j^* \delta_1(\omega_i) \deg_{i-1}(\omega)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_m)} \\ &= \delta_1(\omega_i) \deg_{i-1}(\omega)\, \delta_0(\omega_j) \deg_{j-1}(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_m)\, e_{(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_{j-1}, 1, \dots \omega_m)}. \end{aligned}$$

Es gilt für $i < j$

$$\delta_1(\omega_i) \deg_{j-1}(\omega) = -\delta_1(\omega_i) \deg_{j-1}(\omega_1, \dots \omega_{i-1}, 0, \dots \omega_m).$$

Somit folgt für alle $i < j$ und für alle $\omega \in M$

$$a_i a_j^* e_\omega = -a_j^* a_i e_\omega.$$

Daraus ergibt sich $\left\{a_i, a_j^*\right\} = 0$ für alle $i < j$. ∎

Bemerkung 7 *Mit der Bezeichnung* $\Omega = e_{(0,\ldots 0)}$ *gilt* $a_i\Omega = 0$ *und*

$$(a_1^*)^{\omega_1}\ldots(a_m^*)^{\omega_m}\,\Omega = e_{(\omega_1,\ldots\omega_m)}.$$

Dabei ist auf die Reihenfolge der Operatoren $(a_i^*)^{\omega_i}$ *peinlich zu achten, um Vorzeichenfehler zu vermeiden. Tut man dies, dann sind die Matrixelemente der Polynomfunktionen der Operatoren* $a_1,\ldots a_m^*$

$$\left\langle e_{(\omega_1,\ldots\omega_m)}, P\left(a_1,\ldots a_m^*\right) e_{\left(\omega_1',\ldots\omega_m'\right)}\right\rangle$$

auch ohne die explizite Kenntnis der Darstellung ausschließlich durch Verwendung von $a_i\Omega = 0$ *und den Antikommutatorrelationen zu berechnen.*

Bemerkung 8 *Auf jedem* 2^m *dimensionalen komplexen Vektorraum existieren somit unendlich viele verschiedene Darstellungen der CAR. Sie sind alle zueinander unitär äquivalent.*

Bemerkung 9 *Eine äquivalente Darstellung der CAR mit m Freiheitsgraden liefert die äußere Algebra* $\mathfrak{A}(V)$ *über einem komplexen Vektorraum* V *mit* $\dim(V) = m$ *und dem Skalarprodukt* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Sei* $\underline{e} = (e_1,\ldots e_m)$ *eine Orthonormalbasis von* V. *Es gilt* $\mathfrak{A}(V) = \oplus_{k=0}^m \mathfrak{A}_k(V)$, *wobei* $\mathfrak{A}_k(V)$ *für* $k \in \{1,\ldots m\}$ *die lineare Hülle von* $\{e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k} \mid i_1,\ldots i_k \in \{1,\ldots m\}\}$ *ist. Weiter gilt* $\mathfrak{A}_0(V) = \mathbb{C}$. *Es gilt also*

$$\dim\mathfrak{A}_k(V) = \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \text{ und } \dim\mathfrak{A}(V) = \sum_{k=0}^m \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} = 2^m.$$

Die lineare Abbildung $A_i^* : \mathfrak{A}(V) \to \mathfrak{A}(V)$ *ist durch*

$$A_i^* : \omega \mapsto e_i \wedge \omega$$

definiert. Es gilt: $(A_i)_{i=1}^m$ *ist eine Darstellung der CAR von m Freiheitsgraden. Einen Isomorphismus zwischen dieser Darstellung im Vektorraum* $\mathfrak{A}(\mathbb{C}^m)$ *und der oben ausführlich diskutierten Darstellung im m-fachen Tensorprodukt* $\mathbb{C}^2\otimes\ldots\otimes\mathbb{C}^2$ *induziert die Abbildung*

$$e_i \mapsto e_0\otimes e_0\otimes\ldots\otimes e_1\otimes e_0\ldots\otimes e_0$$

mit 1 *im i-ten Faktor.*