Klausur zur VU *Differentialformen in der Physik* (705.415) SoSe 2016 Gebhard Grübl
1. Prüfungstermin, 28. Juni 2016, 10:15 - 11:00 HS G

Argumentieren Sie auf einem Beiblatt! Name..

1. (5P) Sei $(e_1, \ldots e_n)$ für $n > 2$ eine Basis des reellen Vektorraums V und sei $\left(E^1, \ldots E^n\right)$ die dazu duale Basis von V^*. Berechnen Sie:
   (a) (2P) $\left(E^1 \wedge E^2\right)(e_1, e_2) =$ ....
   (b) (1P) $\left(E^1 \wedge E^2\right)(e_2, e_1) =$ ....
   (c) (1P) $\left(E^1 \wedge E^2\right)(e_1 + e_2, e_1 - e_2 + e_n) =$ ....
   (d) (1P) $\left(\left(E^1 + E^2\right) \wedge E^2\right)(e_1, e_2) =$ ....

2. (4P) Sei $(e_1, \ldots e_n)$ für $n \geq 2$ eine orthonormale Basis des reellen Vektorraums V und $\left(E^1, \ldots E^n\right)$ die dazu duale Basis von V^*. Berechnen Sie mit dem Hodge-Stern:
   (a) (2P) $*\left(E^1 \wedge E^2\right) =$ ....
   (b) (2P) $\left(*E^1\right) \wedge E^2 =$ ....

3. (11P) Auf dem Kartenbereich U der sphärischen Karte $\Phi = (\vartheta, \varphi)$ von $\mathbb{S}^2_R := \left\{v \in \mathbb{R}^3 : |v| = R\right\}$ für ein festes $R > 0$ gelte $f = \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi)$.
   (a) (1P) Geben Sie die Zerlegung von df nach den Differentialen $d\vartheta$ und $d\varphi$ an.
   (b) (2P) Sei g die Riemannsche Struktur von $\mathbb{S}^2_R$, die von der Standardnorm $|\cdot|$ des $\mathbb{R}^3$ durch die Einbettung $\mathbb{S}^2_R \subset \mathbb{R}^3$ induziert wird. Geben Sie die Zerlegung von

   $$\mathrm{grad}\, f = \text{..........................}$$

   nach den kanonischen Tangentenvektorfeldern $\delta_1^\Phi, \delta_2^\Phi$ der Kartenbasis an. Hinweis: auf U gilt

   $$g = R^2 \left(d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi \otimes d\varphi\right)$$

   (c) (1P) Es gilt $|\mathrm{grad}\, f| =$ ....
   (d) (3P) Geben Sie die Volumsform $\tau =$ .... zu g an. Berechnen Sie

   $$\tau\left(\delta_1^\Phi, \delta_2^\Phi\right) = \text{....................} \text{ und } d\tau = \text{...........}$$

   (e) (1P) Drücken Sie $\flat\, \mathrm{grad}\, f =$ .... durch df aus.
   (f) (1P) Geben Sie das Skalarfeld der Richtungsableitungen $[\mathrm{grad}\, f]\, f =$ .... an.
   (g) (1P) Berechnen Sie $d\left(-R^2 \cos\theta d\varphi\right) =$ ....
   (h) (1P) Sei ∇ der Levi-Civita Zusammenhang zu g. Geben Sie $\nabla_{\mathrm{grad}(f)} g =$ .... an.

Lösung:

1a) Es gilt

$$\left(E^1 \wedge E^2\right)(e_1, e_2) = \det \begin{pmatrix} E^1(e_1) & E^1(e_2) \\ E^2(e_1) & E^2(e_2) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

1b) Die Bilinearform $E^1 \wedge E^2$ ist alternierend. Daher gilt

$$\left(E^1 \wedge E^2\right)(e_2, e_1) = -\left(E^1 \wedge E^2\right)(e_1, e_2) = -1.$$

1c) Es gilt unter Verwendung der Bilinearität und der Tatsache $\left(E^1 \wedge E^2\right)(v, v) = 0$

$$\left(E^1 \wedge E^2\right)(e_1 + e_2, e_1 - e_2 + e_n) = -2 + \left(E^1 \wedge E^2\right)(e_1 + e_2, e_n).$$

Wegen $n > 2$ gilt $E^1(e_n) = E^2(e_n) = 0$. Damit folgt $\left(E^1 \wedge E^2\right)(e_1 + e_2, e_1 - e_2 + e_n) = -2$.

1d) Das Dachprodukt von 1-Formen ist bilinear und ungerade. Daher gilt

$$\left(E^1 + E^2\right) \wedge E^2 = E^1 \wedge E^2 + E^2 \wedge E^2 = E^1 \wedge E^2 + 0.$$

Damit gilt $\left(\left(E^1 + E^2\right) \wedge E^2\right)(e_1, e_2) = \left(E^1 \wedge E^2\right)(e_1, e_2) = 1$.

2a) Ist $(e_1, \ldots e_n)$ für $n \geq 2$ eine orthonormale Basis positiv orientiert, gilt

$$*\left(E^1 \wedge E^2\right) = E^3 \wedge \ldots \wedge E^n.$$

Ist $(e_1, \ldots, e_{n-1}, -e_n)$ positiv orientiert, dann gilt

$$*\left(E^1 \wedge E^2\right) = E^3 \wedge \ldots \wedge (-E^n) = -E^3 \wedge \ldots \wedge E^n.$$

2b) Es gilt je nach Orientierung der ONB

$$\left(*E^1\right) \wedge E^2 = (\pm 1)\, E^2 \wedge \ldots \wedge E^n \wedge E^2 = 0.$$

3a) Die Zerlegung ist natürlich nur auf U möglich. Dort gilt für $f = \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi)$

$$df = \sum_{i=1}^{2} \left(\partial_i^\Phi f\right) d\Phi^i = \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi)\, d\vartheta - \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi)\, d\varphi.$$

3b) Es gilt

$$\operatorname{grad} f = \sharp df = \sum_{i=1}^{2} \left(\partial_i^\Phi f\right) \cdot G^{ij} \cdot \delta_j^\Phi.$$

Inversion der Matrix

$$(g_{ij}) = R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

ergibt die Matrix

$$\left(G^{ij}\right) = R^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sin^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\operatorname{grad} f = R^{-2} \left[\cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \cdot \delta_1^\Phi - \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta)} \cdot \delta_2^\Phi\right].$$

3c) Es gilt

$$\begin{aligned} |\operatorname{grad} f|^2 &= g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) = G(df, df) = \sum_{i,j=1}^{2} \left(\partial_i^\Phi f\right) \cdot G^{ij} \cdot \left(\partial_j^\Phi f\right) \\ &= R^{-2}\left[\cos^2(\vartheta) \cdot \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right] = R^{-2}\left[1 - \sin^2(\vartheta) \cdot \cos^2(\varphi)\right] \end{aligned}$$

und daher

$$|\operatorname{grad} f| = \frac{1}{R}\sqrt{1 - \sin^2(\vartheta) \cdot \cos^2(\varphi)}.$$

3d) Es gilt auf U

$$\tau = \sqrt{\det(g_{ij})}\, d\vartheta \wedge d\varphi = R^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta \wedge d\varphi.$$

Es gilt $\tau\left(\delta_1^\Phi, \delta_2^\Phi\right) = R^2 \sin\vartheta$ und $d\tau = 0$, da τ maximalen Grad hat.

3e) Es gilt $\flat \operatorname{grad} f = df$.

3f) Es gilt $[\operatorname{grad} f]\, f = df(\operatorname{grad} f) = g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) = |\operatorname{grad} f|^2$. (Siehe 3c)

3g) Es gilt $d\left(-R^2 \cos\vartheta d\varphi\right) = R^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta \wedge d\varphi = \tau$.

3h) Der LC-Zusammenhang ist g-verträglich. Daher: Für jedes Vektorfeld X gilt $\nabla_X g = 0$ und insbesondere auch $\nabla_{\operatorname{grad}(f)} g = 0$.