

---

Komplexe Potenzen, Kehrwert, Exponentialfunktion, Argumentfunktion, Wurzeln in  $\mathbb{C}$

1. Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = z^2$ . Es bezeichnet  $\Re z$  den Realteil und  $\Im z$  den Imaginärteil von  $z \in \mathbb{C}$ .
  - (a) Skizzieren Sie die Mengen  $V = \{z \in \mathbb{C} : \Re z = 1\}$  und  $H = \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 1\}$ . Berechnen und skizzieren Sie die Bildmengen von  $V$  und  $H$  unter  $f$ .
  - (b) Skizzieren Sie die Menge  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ . Berechnen und skizzieren Sie die Bildmenge von  $K$  unter  $f$ . Welches Bild hat die Menge  $K_+ = \{z \in K : \Im z > 0\}$  unter  $f$ ?
  - (c) Werden die Punkte eines Kreises vom Radius 1 um 1 mit  $i$  multipliziert, ergibt sich welche Punktmenge?
  - (d) Die Abbildung  $z \mapsto 1/z$  führt die Menge  $K$  in welche Menge über?
2. Bestimmen Sie eine Zahl  $z_+ \in \mathbb{C}$  mit  $\Re z_+ \geq 0$  und  $z_+^2 = 1 + it$  für ein festes  $t \in \mathbb{R}$ . Ist  $z_+$  eindeutig bestimmt? Geben Sie Real-, Imaginärteil und Betrag von  $z_+$  an. Skizzieren Sie die Mengen

$$V = \{1 + it : t \in [-1, 1]\}, \quad \{z_+ : t \in [-1, 1]\} \quad \text{und} \quad \{1/z_+ : t \in [-1, 1]\}.$$

3. Geben Sie für die vier Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^4 = -1$  die folgenden Größen an:  $|z|, \Re z, \Im z, \arg(z)$ .  
*Hinweis:* Für eine komplexe Zahl  $z \neq 0$  ist  $\varphi := \arg z$  jene (eindeutig bestimmte) reelle Zahl im Intervall  $(-\pi, \pi]$ , für die gilt, dass

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| e^{i\varphi}.$$

4.  $\arg(1 + i\sqrt{3}) = ?$ ,  $\arg(\sqrt{3} - i) = ?$  Berechnen Sie Betrag und Argument aller  $z, w \in \mathbb{C}$  mit  $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$  und  $w^3 = \sqrt{3} - i$ . Geben Sie auch alle  $u, v \in \mathbb{C}$  mit  $e^u = 1 + i\sqrt{3}$  und  $e^v = \sqrt{3} - i$  an.