Laplaceoperator in Polar- und Kugelkoordinaten

1. Sei $\Psi = (x, y)$ die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\right\}$ (geschlitzte Ebene). Sei $\Phi = (\rho, \varphi)$ die Karte der Polarkoordinaten auf U.

   (a) Skizzieren sie einige Niveaulinien von ρ bzw φ.

   (b) Zerlegen Sie die Kartenbasis zu Φ in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \varphi_0)$ nach der Standardbasis.

   (c) Zeigen Sie, dass die Funktionalmatrix $\left(\partial_j^\Phi \Psi^i\right)$ überall maximalen Rang hat.

   (d) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix[1] $G^\Phi(p)$ in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \varphi_0)$.

   (e) Sei $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$. Zeigen Sie $\Delta f = \left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial_\varphi^2\right) f$ auf U.

   Hinweis: $\Delta f = \left[\delta_1^\psi\right]^2 f + \left[\delta_2^\psi\right]^2 f$. Drücken Sie die iterierte Richtungsableitung $\left[\delta_i^\psi\right]^2 f = \left[\delta_i^\psi\right]\left(\left[\delta_i^\psi\right] f\right)$ durch (iterierte) Richtungsableitungen unter δ_1^Φ und δ_2^Φ aus.

2. Am Kartenbereich U der Polarkoordinaten von $\mathbb{R}^2$ gelte $f_n = r^n \cos(n\varphi)$ und $g_n = r^{-n}\cos(n\varphi)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie $\Delta f_n = \Delta g_n = 0$. Geben Sie für $n = 0, 1, 2$ die Kartenausdrücke von f_n und g_n in der Standardkarte an. Sind f_n bzw g_n für $n = 0, 1, 2$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ oder gar $\mathbb{R}^2$ zu $\mathcal{C}^2$-Funktionen fortsetzbar? Figur 1 zeigt f_3.

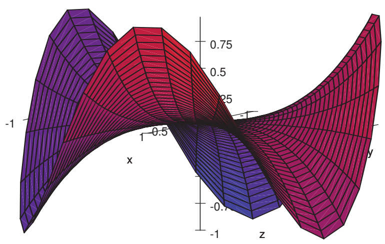

Figure 1: Der Graph von $f_3 = x^3 - 3xy^2$

3. Seien (r, θ, φ) Kugelkoordinaten auf $U \subset \mathbb{R}^3$ wie in der Vorlesung. Zeigen Sie $\Delta\varphi = 0$ und $\Delta\cos\theta = -2\cos(\theta)/r^2$. *Hinweis:* Benutzen Sie Δ in Kugelkoordinaten. Welchen Kartenausdruck hat $\cos\theta$ bzw $\Delta\cos\theta$ in der Standardkarte? Lesen Sie daran ab: $\cos\theta$ und $\Delta\cos\theta$ sind stetig nach $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ fortsetzbar. Ist die stetige Fortsetzung von $\cos\theta$ bzw $\Delta\cos\theta$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion?

4. Seien (r, θ, φ) Kugelkoordinaten auf $U \subset \mathbb{R}^3$ wie in der Vorlesung. Zeigen Sie für das elektrische Potential einer homogen geladenen Halbgerade, nämlich $\Phi = \ln(r(1 - \cos\theta))$ auf U, dass $\Delta\Phi = 0$. Auf welchen maximalen Definitionsbereich $U' \supset U$ lässt sich Φ zu einer C^2-Funktion fortsetzen?

[1] Zum Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^2$.