

Laplaceoperator; Rotation und Vektorpotential eines Vektorfeldes

Sei V ein \mathbb{R} -VR endlicher Dimension mit SP $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und zugehöriger Norm $|\cdot|$.

1. *Skalarpotential eines Punktdipols:* Für ein $p \in V \setminus 0$ gelte¹ $\Phi : V \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(v) = |v|^{-3} \cdot \langle p, v \rangle$. Zeigen Sie² für $v \in V \setminus 0$ zuerst $\text{grad}_v \Phi = |v|^{-3} (p - 3|v|^{-2} \langle p, v \rangle \cdot v)$ und dann $\Delta_v \Phi = 0$.
2. Seien $k, q \in V$ und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit
 - (a) *Ebene Wellenlösung der Helmholtzgleichung:* $f(v) = \sin \langle k, v \rangle$. Zeigen Sie $\Delta f + |k|^2 f = 0$.
 - (b) *Lösung der Poissongleichung mit konstanter Quelle:* $f(v) := \langle k, v \rangle \langle q, v \rangle$. Zeigen Sie $\Delta f = 2 \langle q, k \rangle$. Figur 1 zeigt den Fall $n = 2$ für $\langle q, k \rangle = 0$, ein 2d Innenraumquadrupolpotential.

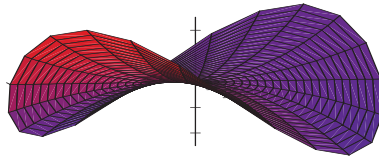


Figure 1: Die Funktion $f(x, y) = xy$

3. *Drehinvariante, radiale Vektorfelder sind rotationsfrei:* Sei nun $\dim V = 3$ und $X : V \setminus 0 \rightarrow V$ mit $p \mapsto f(|p|) \cdot p$ für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie $\text{rot}(X) = 0$ entweder durch Nachrechnen mit den Faulenzerregeln, oder indem Sie ein skalares C^2 -Potential Φ von X finden.
4. *Vektorpotentiale eines unendlich langen geraden Stromfadens:* Für $\dim V = 3$ sei $e \in V$ mit $|e| = 1$ und $c \in \mathbb{R}$. Für $p \in U = V \setminus (\mathbb{R} \cdot e)$ gelte³ $cB(p) = (e \times p) / |e \times p|^2$. Das VF B hat die Symmetrien: $B \circ R = R \circ B$ für alle Drehungen R um e und $B \circ T_{\lambda e} = B$ für alle Translationen von V um λe mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Beachten Sie: $|e \times p|$ ist der Abstand von p zur Achse $\mathbb{R} \cdot e$.
 - (a) Zeigen Sie $\text{div}(B) = 0$ und $\text{rot}(B) = 0$ auf U .
 - (b) Berechnen Sie mit dem Ansatz $cA(p) = f(|e \times p|) \cdot e$ (auf U) ein Vektorpotential zu B . Finden Sie also eine Lösung A von $B = \text{rot}(A)$. Gibt es mehrere Lösungen?⁴
 - (c) Ist B konservativ? *Hinweis:* Berechnen Sie das Wegintegral von B längs eines Kreises um 0, der senkrecht zu e liegt.

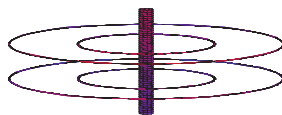


Figure 2: B-Feldlinien eines Stromfadens

¹ Φ ist bis auf einen konstanten Faktor die elektrische Potentialfunktion eines Punktdipols im 3d Raum.

²Greifen Sie gegebenenfalls auf Ihre Lösung von Bsp. 4c) von Blatt 13 aus dem PS zu MM1 im SS15 zurück.

³ B ist für $1/c = \mu_0 \frac{I}{2\pi}$ das Magnetfeld eines auf $\mathbb{R} \cdot e$ in Richtung e fließenden Stromes der Stärke I .

⁴Eine Lösung ergibt sich mit $cA(x) = -\ln(x)$.