Legendrefunktionen und tesserale[1] Kugelfunktionen (Freiwillig wegen Terminentfalls)

1. Geben Sie die Legendrefunktion $P_l^m : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit
$$P_l^m(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}{2^l \cdot l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m} \left(x^2-1\right)^l$$
und die kartesischen Kartenausdrücke der zugehörigen Kugelfunktionen
$$C_l^m = P_l^m(\cos\theta) \cdot \cos(m\varphi), \quad S_l^m = P_l^m(\cos\theta) \cdot \sin(m\varphi)$$
für alle Werte $(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $l \leq 2$ und $m \leq l$ an.

2. Für das elektrostatische Potential $\Phi : \mathbb{R}^3 \smallsetminus 0 \to \mathbb{R}$ eines Punktdipols mit Dipolmomentenvektor $p \in \mathbb{R}^3$ gilt $\Phi(v) = c \langle p, v \rangle / |v|^3$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie, dass Konstanten $A_0, A_1, B_1 \in \mathbb{R}$ existieren, sodass auf dem Kartenbereich U der Kugelkoordinaten (r, θ, φ) gilt:
   $$\Phi = \frac{c}{r^2}\left[A_0 \cdot P_1^0(\cos\theta) + P_1^1(\cos\theta) \cdot (A_1 \cdot \cos\varphi + B_1 \cdot \sin\varphi)\right].$$
   Hinweis: Es existiert eine dehnungsinvariante Funktion $Y : \mathbb{R}^3 \smallsetminus 0 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(v) = \frac{c}{|v|^2} Y(v)$. Es gilt bekanntlich $\Delta\Phi = 0$. Welche partielle DG erfüllt daher Y?

   (b) Welche Werte haben die Zahlen A_0, A_1, B_1 für $p = e_3$, für $p = e_2$ und für $p = e_1$, wenn (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$ ist? Welche Werte haben die Zahlen A_0, A_1, B_1 für einen beliebigen Vektor $p \in V$?

3. Sei Y_l eine Linearkombination der Funktionen $\{C_l^m\}_{m=0}^l \cup \{S_l^m\}_{m=1}^l$ und $u, v : \mathbb{R}^3 \smallsetminus 0 \to \mathbb{R}$ mit $u = \sum_{l=0}^N \frac{1}{r^{l+1}} Y_l$ bzw $v = \sum_{l=0}^N r^l Y_l$. Zeigen Sie, dass u, v harmonisch sind.[2]

[1] Tessera: lateinisch für 'das Mosaiksteinchen'; hier einige aus dem Bodenbelag der Basilika von Aquileia.

[2] Das Gravitationspotential der Erde ist außerhalb des Erdkörpers eine Funktion vom Typ u. Diese wird in Form der Entwicklungskoeffizienten α_m^l, β_m^l mit $Y_l = \sum_{m=0}^l \alpha_m^l C_l^m + \sum_{m=1}^l \beta_m^l S_l^m$ speicherplatzsparend tabelliert.

Lösung:

1. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
P_0^0(x) &= 1,\\
P_1^0(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)\left(x^2-1\right)=x,\\
P_1^1(x) &= \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2\left(x^2-1\right)=\sqrt{1-x^2},\\
P_2^0(x) &= \frac{1}{2^2\cdot 2!}\left(\frac{d}{dx}\right)^2\left(x^2-1\right)^2=\frac{1}{2^3}\left(\frac{d}{dx}\right)^2\left(x^4-2x^2+1\right)=\frac{3x^2-1}{2},\\
P_2^1(x) &= \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2^2\cdot 2!}\left(\frac{d}{dx}\right)^3\left(x^2-1\right)^2=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\frac{d}{dx}\left(3x^2-1\right)=3x\sqrt{1-x^2},\\
P_2^2(x) &= \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{2}{2}}}{2^2\cdot 2!}\left(\frac{d}{dx}\right)^3\left(x^2-1\right)^2=\frac{1-x^2}{2}\cdot\frac{d}{dx}(6x)=3\left(1-x^2\right).
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst:

P_l^m	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$l=0$	1	$-$	$-$
$l=1$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$-$
$l=2$	$\frac{3x^2-1}{2}$	$3x\sqrt{1-x^2}$	$3\left(1-x^2\right)$

Für die kartesischen Kartenausdrücke folgt daraus mit der Abkürzung $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

C_l^m	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$l=0$	1	$-$	$-$
$l=1$	$\frac{z}{r}$	$\frac{x}{r}$	$-$
$l=2$	$\frac{2z^2-x^2-y^2}{2r^2}$	$\frac{3zx}{r^2}$	$\frac{3}{r^2}\left(x^2-y^2\right)$

und

S_l^m	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$l=0$	0	$-$	$-$
$l=1$	0	$\frac{y}{r}$	$-$
$l=2$	0	$\frac{3zy}{r^2}$	$\frac{6}{r^2}xy$

Dabei wurde benützt: $\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi$ und $\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$.

(a) Es gilt mit $Y(v)=\langle p,v\rangle/|v|$ auf $\mathbb{R}^3\setminus 0$

$$\Phi=\frac{c}{r^2}Y.$$

Für $\lambda>0$ und $v\in\mathbb{R}^3\setminus 0$ folgt $Y(\lambda v)=Y(v)$. Somit ist Y dehnungsinvariant. Daher folgt aus $\Delta\Phi=0$ wegen $\partial_r Y=0$, dass

$$
\begin{aligned}
0 &= c\left\{\partial_r^2+\frac{2}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^2}\right\}\frac{Y}{r^2}=c\left\{\frac{6}{r^4}+\frac{2}{r}\left(\frac{-2}{r^3}\right)+\frac{1}{r^4}\Delta_{\mathbb{S}^2}\right\}Y\\
&= \frac{c}{r^4}\left\{2+\Delta_{\mathbb{S}^2}\right\}Y.
\end{aligned}
$$

Die Funktion Y ist somit Eigenvektor von $-\Delta_{\mathbb{S}^2}$ zum Eigenwert $2=1(1+1)$. Daher ist Y eine Linearkombination der drei (tessersalen) Kugelfunktionen

$$P_1^0(\cos\theta),\quad P_1^1(\cos\theta)\cdot\cos\varphi,\quad P_1^1(\cos\theta)\cdot\sin\varphi,$$

die ja den Eigenraum von $-\Delta_{\mathbb{S}^2}$ zum Eigenwert 2 aufspannen.

(b) Für $p=e_3$ gilt

$$\Phi=\frac{c}{r^2}\cos\theta=\frac{c}{r^2}P_1^0(\cos\theta)=:\Phi_3.$$

Koeffizientenvergleich ergibt somit $A_0=1$ und $A_1=B_1=0$.

Für $p=e_2$ gilt

$$\Phi=\frac{c}{r^2}\sin\theta\cdot\sin\varphi=\frac{c}{r^2}\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot\sin\varphi=\frac{c}{r^2}P_1^1(\cos\theta)\cdot\sin\varphi=:\Phi_2.$$

Koeffizientenvergleich ergibt somit $A_0=0=A_1$ und $B_1=1$.

Für $p = e_1$ gilt

$$\Phi = \frac{c}{r^2} \sin\theta \cdot \cos\varphi = \frac{c}{r^2} \sqrt{1 - \cos^2\theta} \cdot \cos\varphi = \frac{c}{r^2} P_1^1 (\cos\theta) \cdot \cos\varphi =: \Phi_1.$$

Koeffizientenvergleich ergibt somit $A_0 = 0, A_1 = 1$ und $B_1 = 0$.
Für $p = \sum_{i=1}^3 p^i e_i$ gilt $\Phi = \frac{c}{r^2} \sum_{i=1}^3 p^i \Phi_i$ und daher $A_0 = p^3, A_1 = p^1, B_1 = p^2$. Es gilt also $A_1 e_1 + B_1 e_2 + A_0 e_3 = p$.

2. Aus VO ist bekannt: $\Delta_{S^2} Y_l = -l\,(l+1)\,Y_l$. Die dehnungsinvarianten Funktionen Y_l sind auf $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ zweimal stetig d'bar. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \sum_{l=0}^N \Delta \frac{Y_l}{r^{l+1}} = \sum_{l=0}^N \left(\frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} \right) \frac{Y_l}{r^{l+1}} \\
&= \sum_{l=0}^N \left(-\,(l+1)\,\frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 r^{-l-2} \right) - \frac{r^{-l-1}}{r^2} l\,(l+1) \right) Y_l \\
&= \sum_{l=0}^N \left(-\,(l+1)\,\frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^{-l} \right) - \frac{r^{-l-1}}{r^2} l\,(l+1) \right) Y_l \\
&= \sum_{l=0}^N \left((l+1)\, l \frac{1}{r^2} \left(r^{-l-1} \right) - \frac{r^{-l-1}}{r^2} l\,(l+1) \right) Y_l = 0.
\end{aligned}$$

Analog folgt

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \sum_{l=0}^N \Delta r^l Y_l = \sum_{l=0}^N \left(\frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r r^l \right) - \frac{l\,(l+1)}{r^2} \right) Y_l \\
&= \sum_{l=0}^N \left(\frac{l}{r^2} \partial_r \left(r^{l+1} \right) - \frac{l\,(l+1)\, r^l}{r^2} \right) Y_l = 0.
\end{aligned}$$