Proseminar Mathematische Methoden der Physik II *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 12, 29. Jänner 2016

Name:..Matrikelnr:..

Zahl der abgegebenen Blätter inkl Angabeblatt..................

Zweite Klausur *Begründen Sie Ihre Antworten nachvollziehbar!*

1. (10P) Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = \arctan(x/a)$ für ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Weiter sei $v = -cu'$ für ein $c > 0$.
   (a) (2P) Berechnen Sie $v(x) =$ ....
   (b) (3P) Berechnen Sie die Funktion $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R})$ mit $\left(c^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right) A = 0$ und $A(0, \cdot) = u$, $\partial_t A(0, \cdot) = v$. Es gilt
   $$A(t, x) = \text{......................................}$$
   (c) (3P) Kontrollieren Sie an Ihrer Lösung A ob $\Box A = 0$ und ob die Anfangsvorgabe tatsächlich erfüllt ist.
   (d) (2P) An welchem Ort ist die Energiedichte $\varepsilon_A(t, \cdot)$ von A zur Zeit $t = a/c$ maximal?

2. (10P) Für die Gesamtenergie E_A von A aus Bsp1 gilt:
   $$E_A = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s^2)^2} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}.$$
   (a) (2P) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der holomorphen Funktion $f(z) = \left(1 + z^2\right)^{-2}$ an. Welchen Grad hat der Pol von f in i?
   (b) (2P) Wenn das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ in der oberen komplexen Halbebene geschlossen wird, drückt sich sein Wert durch das Residuum von f an der Stelle .... folgendermaßen aus:
   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \text{............} \cdot \mathrm{Res}_{\dots}(f)$$
   (c) (2P) Berechnen Sie das Residuum von f in i.
   $$\mathrm{Res}_i(f) = \text{.........................}$$
   (d) (2P) Berechnen Sie $E_A =$ .... Wird a verdoppelt, dann ändert sich die Energie E_A wie?
   (e) (2P) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ hat die Lösung λA die Energie $E_{\lambda A} =$ ...... $\cdot\, E_A$.

Lösung:

1a) Es gilt $\arctan'(x) = \left(1+x^2\right)^{-1}$ und daher nach Kettenregel

$$u'(x) = \frac{\arctan'(x/a)}{a} = \frac{1}{1+(x/a)^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a^2+x^2}.$$

Daher gilt

$$v(x) = -\frac{ac}{a^2+x^2}.$$

1b) Nach Blatt 8, Bsp3 ist A rechtsläufig mit $A(t,x) = u(x-ct)$. Daher gilt

$$A(t,x) = \arctan\frac{x-ct}{a}.$$

1c) Probe: Es gilt $c^{-1}\partial_t A(t,x) = -u'(x-ct)$ und $c^{-2}\partial_t^2 A(t,x) = u''(x-ct)$. Analog $\partial_x^2 A(t,x) = u''(x-ct)$. Somit gilt

$$\Box A(t,x) = c^{-2}\partial_t^2 A(t,x) - \partial_x^2 A(t,x) = 0.$$

Weiter gilt

$$A(0,x) = u(x) \text{ und } (\partial_t A)(0,x) = -cu'(x) = v(x).$$

1d) Es gilt

$$\varepsilon(x) \equiv \varepsilon_A(0,x) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{v(x)}{c}\right)^2 + \left(u'(x)\right)^2\right) = \left(u'(x)\right)^2 = \frac{a^2}{\left(a^2+x^2\right)^2}.$$

ε ist maximal in $x=0$ mit $\varepsilon(0) = a^{-2}$. Die Energiedichte einer rechtsläufigen Lösung verschiebt sich mit der Geschwindikeit c nach rechts. Zur Zeit $t = a/c$ ist die Energiedichte daher in a maximal.

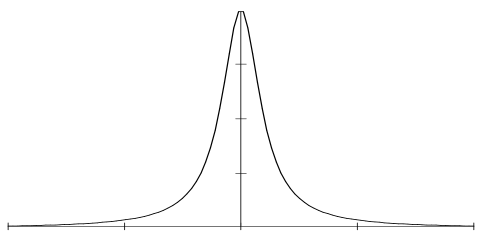

Figure 1:

2a) Der maximale Definitionsbereich von $f(z) = \left(1+z^2\right)^{-2}$ ist $\mathbb{C} \setminus \{i,-i\}$. Wegen

$$f(z) = \frac{1}{\left(1+z^2\right)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{(z+i)^2}$$

ist die Nennernullstelle bei i eine zweifache Nullstelle. Daher hat die Polstelle den Grad 2.

2b) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_i(f)$$

2c) Es gilt für den Pol 2. Ordnung in i

$$\operatorname{Res}_i(f) = \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right]\Big|_{z=i} = \frac{d}{dz}\left[(z+i)^{-2}\right]\Big|_{z=i} = -2\left[(z+i)^{-3}\right]\Big|_{z=i} = -\frac{2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$$

2d) Es gilt

$$E_A = \frac{2\pi i}{a} \cdot \operatorname{Res}_i(f) = \frac{2\pi i}{a} \cdot \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right]\Big|_{z=i} = \frac{2\pi i}{a} \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2a}.$$

Verdoppelung von a halbiert E_A. Der Grenzwert von E_A für $a \to 0$ existiert nicht.

2e) Hat A die Energie E_A, dann hat für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösung λA die Energie $E_{\lambda A} = \lambda^2 E_A$.