Proseminar Mathematische Methoden der Physik II — *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 11, 25. Jänner 2016

Randwertaufgaben der Potentialtheorie[1]*: Dirichletvorgabe am Kreis*

$\overline{K}_R$ sei der Abschluss der offenen Kreisscheibe $K_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ um 0 mit Radius $R > 0$. $\partial K_R = \overline{K}_R \setminus K_R$ ist der Rand von K_R, also die Kreislinie um 0 mit Radius R.

1. *Innenraumaufgabe:* Bestimmen Sie durch Überlagern von harmonischen Funktionen auf $\mathbb{R}^2$, die in Polarkoordinaten (r, φ) faktorisieren, eine Funktion $u : \overline{K}_R \to \mathbb{R}$, die auf K_R harmonisch ist, und auf ∂K_R die Randbedingung $u|_{r=R} = (4/3)\sin^3\varphi$ erfüllt. *Hinweis:* Verwenden Sie die Lösungen von Bsp. 4, Blatt 10, WS 15/16. *Lösung:*

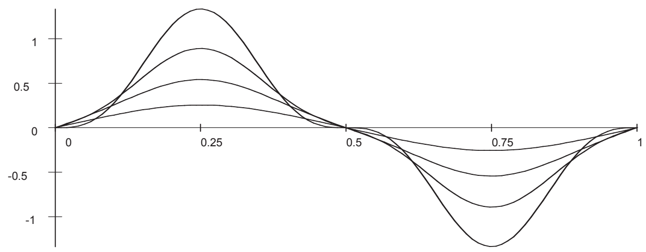
$$u = \left(\frac{r}{R}\right)\sin\varphi - \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{\sin(3\varphi)}{3}$$

   Freiwilliger Zusatz: Geben Sie den kartesischen Kartenausdruck von u an.
   Hinweis: $r^3 \sin 3\varphi = \Im\left[(x+iy)^3\right]$. *Lösung:* $u = (y/R)\left(1 - \left(3x^2 - y^2\right) / \left(3R^2\right)\right)$

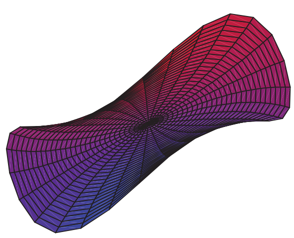
2. *Außenraumaufgabe:* Bestimmen Sie durch Überlagern von harmonischen Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, die in Polarkoordinaten (r, φ) faktorisieren, eine beschränkte(!) Funktion $u : \mathbb{R}^2 \setminus K_R \to \mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{K}_R$ harmonisch ist, und auf ∂K_R die Randbedingung $u|_{r=R} = (4/3)\sin^3\varphi$ erfüllt. *Lösung:*

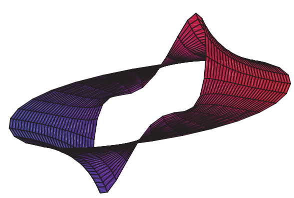
$$u = \left(\frac{R}{r}\right)\sin\varphi - \left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{\sin(3\varphi)}{3}$$

   Freiwilliger Zusatz: Geben Sie den kartesischen Kartenausdruck von u an.
   Hinweis: $r^{-3}\sin(3\varphi) = r^{-6}\left[r^3 \sin(3\varphi)\right]$.
   Lösung: $u = yR\left(x^2+y^2\right)^{-1}\left(1 - R^2\left(3x^2-y^2\right) / \left(3\left(x^2+y^2\right)^2\right)\right)$



$x \mapsto \alpha\sin(2\pi x) - \alpha^3 \frac{\sin(6\pi x)}{3}$ für $\alpha \in \{1/4, 1/2, 3/4, 1\}$





---

[1] *Siehe Skriptum Kap. 2.8*