Energiedichte und Gesamtenergie von $A \in \ker \Box_2$*; Duhamels Lösungsformel für* $\Box_2 A = j$

1. Seien $\alpha, k > 0$ und $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $A(t,x) = \alpha \sin(k(x-ct))$. Berechnen Sie Energiedichte ε_A und Energiestrom T_A von $A \in \ker \Box$. Geben Sie auch das räumliche Periodenmittel von ε_A zur Zeit t und zeitliche Periodenmittel von ε_A am Ort x an. Stimmt die kleinste Periode von $\varepsilon_A(t,\cdot)$ mit jener von $A(t,\cdot)$ überein? *Lösung:* Für $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\varepsilon_A(t,x) = \alpha^2 k^2 \cos^2(k(x-ct)) = T_A(t,x)/c$ und $\langle \varepsilon_A(t,\cdot)\rangle = \alpha^2 k^2/2 = \langle \varepsilon_A(\cdot,x)\rangle$.

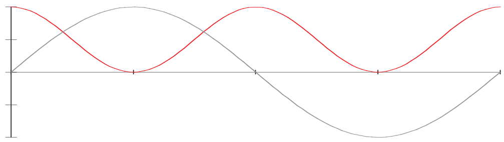

Figure 1: $A(0,x)/\alpha$ und $\varepsilon_A(0,x)/\alpha^2 k^2$ (rot) im Bereich $0 < kx < 2\pi$ (Bsp 1)

2. Seien $q > 0$ und $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $A(t,x) = f(x-ct)$ und $f(x) = \exp\left(-q^2 x^2\right)$. Berechnen Sie ε_A und die gesamte Energie[1] $E_A(t)$ von $A \in \ker \Box$. *Lösung:* $\varepsilon_A(t,x) = 4q^2 (q(x-ct))^2 e^{-2(q(x-ct))^2}$ und $E_A(t) = q\sqrt{\pi/2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

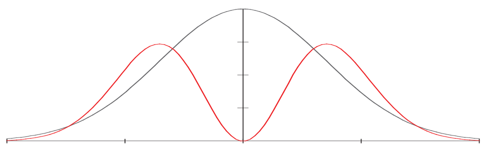

Figure 2: $A(0,\cdot)$ und $\varepsilon_A(0,\cdot)$ (rot) für $q = 1$ und $|x| < 2$ (Bsp 2)

3. Seien $k, q > 0$ und $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $A(t,x) = F(x-ct)$ und $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \sin(ks)\, e^{-\frac{1}{2}(qs)^2} ds$. Berechnen Sie ε_A und die gesamte Energie $E_A(t)$ von $A \in \ker \Box$. *Lösung:* $\varepsilon_A(t,x) = \varepsilon_A(0, x-ct)$ mit $\varepsilon_A(0,x) = F'(x)^2 = \sin^2(kx) \exp\left(-q^2x^2\right)$ und $E_A(t) = \sqrt{\pi}\left(1 - \exp\left(-(k/q)^2\right)\right)/(2q)$.

4. Berechnen Sie mit Duhamels Lösungsformel die Funktion $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ mit $\Box A = 1$ und $A(0,\cdot) = \partial_t A(0,\cdot) = 0$. *Lösung:* $A(t,x) = (ct)^2/2$. Finden Sie eine lorentzinvariante Lösung von $\Box A = 1$, dh eine Lösung mit $A(t,x) = f\left(c^2t^2 - x^2\right)$ für ein $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. *Lösung:* $A(t,x) = \left(c^2t^2 - x^2\right)/4$.

5. *Freiwillig:* Seien $\omega, q \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $j(t,x) = \sin(\omega t)\sin(qx)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie mit Duhamels Lösungsformel die Funktion $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ mit $\Box A = j$ und $A(0,\cdot) = \partial_t A(0,\cdot) = 0$. *Lösung:* Mit $k := \omega/c$ gilt

$$A(t,x) = \begin{cases} \frac{\sin(qx)}{q^2-k^2}\left[\sin(\omega t) - (k/q)\sin(cqt)\right] & \text{für } k \neq q \\ \frac{\sin(qx)}{2q^2}\left[\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t)\right] & \text{für } k = q \end{cases}.$$

[1] Die gesamte Energie von $A \in \ker \Box$ ist gegeben durch $E_A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_A(t,x)\, dx$