Name:..*Matrikelnr:*..

Zahl der abgegebenen Blätter inkl Angabeblatt..................

Erste Klausur *Begründen Sie Ihre Antworten nachvollziehbar!*

1. (4P) Sei (x, y) die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.
   (a) (1P) Berechnen Sie $\partial_x u =$ ....
   (b) (1P) Berechnen Sie $\partial_x^2 u =$ ....
   (c) (1P) Berechnen Sie $\Delta u =$ ....
   (d) (1P) Überprüfen Sie in polaren Koordinaten (r, φ) Ihr Ergebnis für $\Delta u =$ ....
   Hinweis:
   $$\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{1}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 u = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r u\right) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 u.$$
2. (2P) Sei (r, φ) die polare Karte der geschlitzten Ebene $U \subset \mathbb{R}^2$ und $u = r^\alpha \cos(\alpha\varphi)$ auf U für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\Delta u =$ ....
3. (4P) V sei ein reeller Vektorraum der Dimension $n \geq 2$. In V sei ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ samt zugehöriger Norm $|\cdot|$ gewählt. Für ein $e \in V$ mit $|e| = 1$ sei
   $$\Phi : U = V \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e \to \mathbb{R} \text{ mit } \Phi(p) = |p| - \langle e, p\rangle .$$
   (a) (2P) Berechnen Sie im Punkt $p = -e$ den Vektor $\operatorname{grad}_p(\Phi) =$ ....
   (b) (2P) Berechnen Sie im Punkt $p = -e$ die Zahl $\Delta_p \Phi = \operatorname{div}_p(\operatorname{grad}(\Phi)) =$ ....
4. (3P) Der Vektorraum V aus Bsp 3 habe die Dimension $n = 3$. Eine Orientierung sei in V gwählt. Für ein $e \in V$ mit $|e| = 1$ sei $X(p) = |p| \cdot e$.
   (a) (2P) Berechnen Sie $\operatorname{rot}_p X =$ .... für $p \neq 0$.
   (b) (1P) Ist X konservativ?
5. (3P) Welche Zahlen $z \in \mathbb{C}$ erfüllen $z^2 = i$? Geben Sie sowohl Real- als auch Imaginärteil der Lösungen an. Welche der Zahlen ist die Hauptzweigwurzel von i?
6. (4P) Überprüfen Sie mithilfe der CR-Gleichungen die Holomorphie von cos auf $\mathbb{C}$.

Lösung

1a) Es gilt $\partial_x u = 2x/\left(x^2+y^2\right)$ und daher

$$\partial_x^2 u = \frac{2\left(x^2+y^2\right)-(2x)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 2\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

1b) Die Funktion $\partial_y^2 u$ ergibt sich aus $\partial_x^2 u$ durch Austausch von x und y. Also gilt $\partial_y^2 u = 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\partial_x^2 u$ und daher

1c) $\Delta u = 0$.

1d) Es gilt $u = \ln r^2 = 2\ln r$ und daher $\Delta u = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r u\right) = \frac{2}{r}\partial_r\left(r\frac{1}{r}\right) = \frac{2}{r}\partial_r(1) = 0$.

2) Auf U gilt

$$\Delta u = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\right) r^\alpha \cos(\alpha\varphi) = \left(\alpha(\alpha-1)+\alpha-\alpha^2\right) r^{\alpha-2}\cos(\alpha\varphi) = 0.$$

3a) Es gilt

$$\operatorname{grad}_p \Phi = \frac{p}{|p|} - e.$$

Daraus folgt $\operatorname{grad}_{-e}\Phi = \frac{-e}{|-e|} - e = -2e$.

Anmerkung: Es gilt für $p \in U$

$$\left|\operatorname{grad}_p \Phi\right|^2 = \left|\frac{p}{|p|} - e\right|^2 = \left(1 - 2\frac{\langle p,e\rangle}{|p|} + 1\right) = 2\left(1 - \frac{\langle p,e\rangle}{|p|}\right).$$

$|\operatorname{grad} u|$ nimmt sein Maximum 2 also auf der Halbachse $\mathbb{R}_{<0}\cdot e$ an.

3b) Es gilt

$$\Delta\Phi = \operatorname{div}\left(\frac{\iota d}{|\cdot|} - e\right) = \operatorname{div}\frac{\iota d}{|\cdot|}.$$

In Blatt 1, Bsp 2 wurde gezeigt, dass für $m \in \mathbb{Z}$ das Vektorfeld $Y : V \setminus 0 \to V$ mit $Y(p) = |p|^m p$ die Divergenz

$$\operatorname*{div}_p Y = (n+m)\,|p|^m$$

hat. Mit $m = -1$ folgt somit

$$\Delta\Phi = \operatorname{div}\left(|\cdot|^{-1}\,\iota d\right) = \frac{(n-1)}{|\cdot|}.$$

Auswertung im Punkt $-e$ ergibt somit $\Delta_{-e}\Phi = n-1$.

4a) Es gilt nach einer Faulenzerregel und wegen der Konstanz von e

$$\begin{aligned}\operatorname*{rot}_p(X) &= \left(\operatorname*{grad}_p|\cdot|\right)\times e + |p|\operatorname*{rot}_p(e) = \left(\operatorname*{grad}_p|\cdot|\right)\times e \\ &= \frac{p\times e}{|p|} = -\frac{L_e(p)}{|p|} \text{ (Siehe Drehvektorfeld } L_e)\end{aligned}$$

4b) Wegen $\operatorname{rot}(X) \neq 0$ ist X nicht konservativ.

5) Es sind $z_\pm = \pm(1+i)/\sqrt{2}$. Also $\Re z_\pm = \pm 1/\sqrt{2} = \Im z_\pm$. Die Zahl z_+ ist wegen $\Re z_+ > 0$ die Hauptzweigwurzel.

6) Es gilt für $z = x+iy$ mit $x,y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}2\cos z &= e^{iz} + e^{-iz} = e^{ix-y} + e^{-ix+y} = e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y} \\ &= (\cos x + i\sin x)\,e^{-y} + (\cos x - i\sin x)\,e^{y} \\ &= \cos x\left(e^{-y}+e^{y}\right) + i\sin x\left(e^{-y}-e^{y}\right) \\ &= 2\cos x\cosh y - i2\sin x\sinh y.\end{aligned}$$

Also gilt $u(x,y) = \cos x\cosh y$ und $v(x,y) = -\sin x\sinh y$. Die für die CR-Gleichungen relevante Jacobimatrix ist

$$\begin{pmatrix}\partial_x u & \partial_x v \\ \partial_y u & \partial_y v\end{pmatrix}_{(x,y)} = \begin{pmatrix}-\sin x\cosh y & -\cos x\sinh y \\ \cos x\sinh y & -\sin x\cosh y\end{pmatrix}.$$

Somit gilt für alle $z \in \mathbb{C}$, dass $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_y u = -\partial_x v$.