

Rotation und Vektorpotential

Sei  $V$  ein 3d  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit SP  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , zugehöriger Norm  $|\cdot|$  und gewählter Orientierung.

1. *Drehinvariante, radiale Vektorfelder sind rotationsfrei:* Sei  $X : V \setminus 0 \rightarrow V$  mit  $p \mapsto f(|p|) \cdot p$  für eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeigen Sie  $\text{rot}(X) = 0$  entweder durch Nachrechnen mit den Faulenzerregeln, oder indem Sie ein  $C^2$ -Potential  $\Phi$  von  $X$  finden.
2. *Vektorpotentiale eines unendlich langen geraden Stromfadens:* Sei  $e \in V$  mit  $|e| = 1$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Es gelte<sup>1</sup> auf  $U = V \setminus (\mathbb{R} \cdot e)$  für das Vektorfeld  $B$

$$cB(p) = \frac{e \times p}{|e \times p|^2}.$$

$B$  hat die Symmetrien:  $B \circ R = R \circ B$  für alle Drehungen  $R$  um  $e$  und  $B \circ T_{\lambda e} = B$  für alle Translationen von  $V$  um  $\lambda e$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Beachten Sie:  $|e \times p|$  ist der Abstand von  $p$  zur Achse  $\mathbb{R} \cdot e$ .

- (a) Zeigen Sie  $\text{div}(B) = 0$  und  $\text{rot}(B) = 0$  auf  $U$ .
- (b) Berechnen Sie mit dem Ansatz  $cA(p) = f(|e \times p|) \cdot e$  (auf  $U$ ) ein Vektorpotential zu  $B$ . Finden Sie also eine Lösung  $A$  von  $B = \text{rot}(A)$ . Gibt es mehrere Lösungen?<sup>2</sup>
- (c) Ist  $B$  konservativ? *Hinweis:* Berechnen Sie das Wegintegral von  $B$  längs eines Kreises um 0, der senkrecht zu  $e$  liegt.

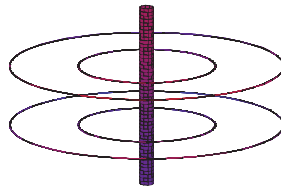


Figure 1: B-Feldlinien eines Stromfadens

3. *Ein Vektorpotential eines magnetischen Punktdipols:* Das magnetische Flussdichtefeld eines Punktdipols mit dem magnetischen Dipolvektor  $m \in V$  in 0 ist  $B : U = V \setminus 0 \rightarrow V$  mit<sup>3</sup>

$$cB(p) = \frac{1}{|p|^3} \left( 3 \frac{\langle m, p \rangle}{|p|^2} p - m \right).$$

Zeigen Sie für das Vektorfeld  $A : U \rightarrow V$  mit  $cA(p) = (m \times p) / |p|^3$ , dass  $B = \text{rot}(A)$ .

4. Sei  $B$  wie in Beispiel 3). Zeigen Sie  $\text{rot}(B) = 0$ . Hinweis: Ist  $B$  konservativ? Beachten Sie Beispiel 2 von Blatt 2 oder rechnen Sie mit den Faulenzerregeln drauflos.
5. (Freiwillig) *Weitere Vektorpotentiale des Punktdipols?* Sei  $B$  wie in Beispiel 3. Bestimmen Sie zu dem Ansatz  $cA(p) = f(|p|) \cdot (m \times p)$  auf  $U$  die Menge aller Funktionen  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ , für die  $B = \text{rot}(A)$  gilt. Ist also  $A$  durch  $B$  eindeutig festgelegt?

<sup>1</sup>  $B$  ist für  $1/c = \mu_0 \frac{I}{2\pi}$  das Magnetfeld eines auf  $\mathbb{R} \cdot e$  in Richtung  $e$  fließenden Stromes der Stärke  $I$ .

<sup>2</sup> Eine Lösung ergibt sich mit  $cf(x) = -\ln(x)$ .

<sup>3</sup> Dabei ist  $c = 4\pi/\mu_0$ .