Gradient, Divergenz, Laplace - Faulenzerregeln

1. Sei (x, y) die Standardkarte von $V = \mathbb{R}^2$ und $|\cdot| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   (a) Für $u : V \to \mathbb{R}$ gelte $u = x^2 - y^2$. Zeigen Sie $\Delta u = 0$. Auf $V \setminus 0$ gelte $X = \operatorname{grad}(u) / |\operatorname{grad}(u)|$. Zeigen Sie $X = (x, -y)/r$ und $\operatorname{div} X = -u/r^3$ auf $V \setminus 0$.

   (b) *Drehinvariante Vortexfelder sind divergenzfrei:* Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ d'bar und für $L : V \to V$ gelte $L = (-y, x)$. Zeigen Sie $\operatorname{div}(X) = 0$ für $X = f(r) \cdot L$ auf $V \setminus 0$.

   (c) *Polarwinkel als Potential einer Dipolschicht*: Auf der geschlitzten Ebene gelte $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ mit $r > 0$ und $0 < \varphi < 2\pi$. Warum folgt aus b) sofort $\Delta\varphi = 0$? *Hinweis*[1]*:* $\operatorname{grad}\varphi =$? Skizzieren Sie einige Feldlinien von $-\operatorname{grad}\varphi$. Wo beginnt und wo endet die Feldlinie durch $(-1, 0)$? Ist sie geschlossen und eine unerschöpfliche Energiequelle?

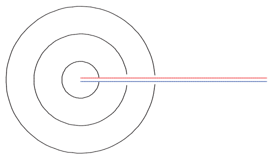

Figure 1: Feldlinien einer dipolbelegten Halbebene

2. *Skalarpotential eines Punktdipols:* Sei V ein 3d Vektorraum, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt von V und $|\cdot|$ die zugehörige Norm. Für ein $p \in V \setminus 0$ gelte[2] $\Phi : V \setminus 0 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(v) = |v|^{-3} \cdot \langle p, v\rangle$. Zeigen Sie[3] für $v \in V \setminus 0$ zuerst $\operatorname{grad}_v \Phi = |v|^{-3}\left(p - 3|v|^{-2}\langle p, v\rangle \cdot v\right)$ und dann $\Delta_v \Phi = 0$.

   Im Weiteren sei V wie in Bsp. 2) aber mit beliebiger, endlicher Dimension.

3. Sei $k \in V$ und $f : V \to \mathbb{R}$ mit $f(v) = \sin\langle k, v\rangle$. Zeigen Sie $\Delta f + |k|^2 f = 0$.

4. *Skalarpotential mit konstanter Ladungsdichte:* Für $k, q \in V$ sei $f(v) := \langle k, v\rangle\langle q, v\rangle$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie $\Delta f = 2\langle q, k\rangle$. Figur 2 zeigt den Fall $n = 2$ für $\langle q, k\rangle = 0$.

5. *Freiwillig; Verallgemeinerung von Bsp 4):* Für eine symmetrische lineare Abbildung $A : V \to V$ sei $f(v) := \langle v, Av\rangle$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie $\Delta f = 2Sp(A)$.

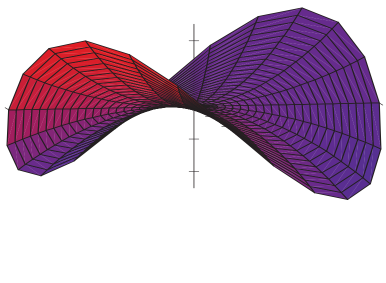

Figure 2: Die Funktion $f(x, y) = xy$

[1] φ ist bis auf einen konstanten Faktor die elektrische Potentialfunktion einer dipolbelegten Halbebene im 3d Raum.
[2] Φ ist bis auf einen konstanten Faktor die elektrische Potentialfunktion eines Punktdipols im 3d Raum.
[3] Greifen Sie gegebenfalls auf Ihre Lösung von Bsp. 4c) von Blatt 13 aus dem PS zu MM1 im SS15 zurück.