

Poissongleichung mit Quelle $c \cdot \Theta(R - |\cdot|)$ (Schwerkraft im Erdinneren; homogen geladene Kugel)

1. Für $R > 0$ ist $K_R = \{p \in \mathbb{R}^3 : |p| < R\}$ die offene Kugel um 0 vom Radius R . Berechnen Sie die (nach einem Satz der Vorlesung) eindeutig bestimmte Funktion $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R})$, für die gilt:

$$\Delta\varphi = c \text{ auf } K_R, \quad \Delta\varphi = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{K_R}, \quad \lim_{|p| \rightarrow \infty} \varphi(p) = 0.$$

Geben Sie auch das Gradientenfeld von φ an. Besitzt φ für $c > 0$ ein Minimum bzw ein Maximum? Wenn ja, wo wird es angenommen?

Hinweis: Versuchen Sie für φ einen um 0 dreihinvarianten Ansatz. *Lösung:*

$$\varphi = \begin{cases} \frac{c}{6}(r^2 - 3R^2) & \text{auf } K_R \\ -\frac{c}{3} \frac{R^3}{r} & \text{auf } \mathbb{R}^3 \setminus K_R \end{cases}, \quad \text{grad}_p(\varphi) = \begin{cases} \frac{c}{3}p & \text{auf } K_R \\ \frac{c}{3} \frac{R^3}{|p|^3}p & \text{auf } \mathbb{R}^3 \setminus K_R \end{cases}.$$

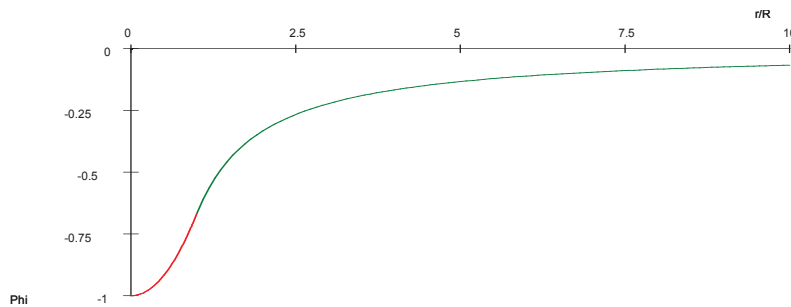


Figure 1: Newtonpotential der Kugel mit konstanter Dichte für $cR^2/2 = 1$

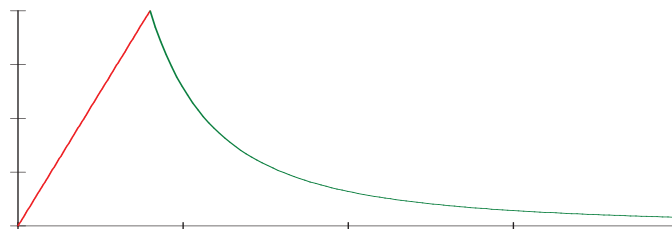


Figure 2: Betrag von $\text{grad}(\varphi)$ als Funktion von r/R

2. (Freiwillig) Welche Bindungsenergie E hat der Grundzustand eines Wasserstoffatoms nach J J Thomsons 'Rosinenkuchenmodell'? Das Modell unterstellt eine Ladungsdichte ρ wie in Beispiel 1) mit einem zunächst unbestimmten Kugelradius R und einer Gesamtladung von einer Elementarladung $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. *Hinweis:* c muss so gewählt werden, dass $cR^3/3 = e^2/(4\pi\epsilon_0)$ gilt. Warum? *Lösung:* $E = \varphi(0) = -(3/2) e^2/(4\pi\epsilon_0 R)$.

Wird etwas anachronistisch der Radius R mit dem Bohrschen Radius $a_B = 4\pi\epsilon_0 \cdot \hbar^2/(m_e \cdot e^2) \approx 0,5(29177) \cdot 10^{-10} \text{ m}$ identifiziert, dann folgt $E \approx -8 \text{ eV}$. Der gemessene Wert ist $E \approx -13,6 \text{ eV}$. Für $R = (8/13,6) \cdot a_B \approx 0,6 \cdot a_B$ reproduziert Thomsons Modell diese stärkere Bindung des ausdehnungslosen Elektrons in ein ausgedehntes Proton.