Name:..*Matrikelnr:*...

Zahl der abgegebenen Blätter inklusive Angabeblatt..................

Zweite Klausur

1. (8P) Sei $f : \mathbb{C} \setminus 2 \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2 / (z-2)$. Für $R > 0$ sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = R \cdot e^{it}$.
   (a) (2P) Berechnen Sie $I := \int_\gamma f(z)\, dz =$ .... für $R < 2$?
   (b) (2P) Geben Sie alle Koeffizienten c_k der Laurentreihe von f um den Punkt 2 an.
   Hinweis: $z^2 = [2 + (z-2)]^2 =$ .....
   (c) (2P) Berechnen Sie $I = \int_\gamma f(z)\, dz =$ .... für $R > 2$?
   (d) (2P) Wie ändert sich das Wegintegral I im Fall $R > 2$, wenn γ durch $\overline{\gamma}(t) = R \cdot e^{-it}$ ersetzt wird?

2. (4P) Sei $k \in \mathbb{R}$. Wir bestimmen nun eine $\mathcal{C}^2$-Funktion $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit $i\partial_t \psi = -\partial_x^2 \psi$, für die eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 1$ existiert, sodass $\psi(t, x) = f(t) \cdot e^{kx}$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) (2P) Welche gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt f?
   (b) (2P) Geben Sie an
   $$\psi(t, x) = \text{...(2P)}$$

3. (4P) Fouriers Formel für die Auslenkungsfunktion A einer am Rand eingespannten, sonst aber frei schwingenden Saite der Länge $L > 0$ besagt: Es gibt $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$, sodass für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times (0, L)$
   $$A(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)\} \sin(k_n x) \ \text{ mit } k_n = n\frac{\pi}{L} \text{ und } \omega_n = c k_n$$
   gilt. Bestimmen Sie (nachvollziehbar!) daraus $A(t, L/2) =$ .... für $t \in \mathbb{R}$, wenn A die Anfangsbedingung $A(0, x) = 0$ und $\partial_t A(0, x) = \omega_2 \sin(k_2 x)$ für $x \in (0, L)$ erfüllt.

4. (4P) Für die Funktion $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R})$ gelte d'Alemberts Wellengleichung $\left(c^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right) A = 0$ und sie erfülle die Anfangsbedingungen $A(0, x) = x^2$ und $\partial_t A(0, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   (a) (2P) Zeigen Sie mit d'Alemberts Lösungsformel, dass $A(t, x) = x^2 + (ct)^2$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) (2P) Prüfen Sie, ob A aus a) die vorliegende Anfangswertaufgabe löst.
   Hinweis zu a: d'Alemberts Lösungsformel lautet
   $$A(t, x) = \frac{u(x - ct) + u(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi)\, d\xi.$$

Lösung:

1a) Die Funktion f ist holomorph in der Kreisscheibe $|z| < 2$. Daher gilt $I = 0$ für $R < 2$. (Cauchys Integralsatz)

1b) f hat bei $z = 2$ eine Polstelle erster Ordnung. Es gilt

$$\frac{z^2}{z-2} = \frac{(2+z-2)^2}{z-2} = \frac{4+4(z-2)+(z-2)^2}{z-2} = \frac{4}{z-2} + 4 + (z-2) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \cdot (z-2)^k$$

mit $c_{-1} = 4, c_0 = 4$ und $c_1 = 1$. Alle anderen c_k verschwinden. Das Residuum von f bei $z = 2$ hat also den Wert 4.

1c) Nach dem Residuensatz gilt $I = 2\pi i \cdot 4 = 8\pi i$. (Umlauf im Gegenuhrzeigersinn!)

1d) Der Umlaufsinn dreht sich um und damit geht I in $-I$ über.

2a) Sei $\psi(t,x) = f(t)\, e^{kx}$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Dann folgt $i\partial_t \psi(t,x) = if'(t)\, e^{kx}$ und $-\partial_x^2 \psi(t,x) = -k^2 f(t)\, e^{kx}$. Somit löst ψ die PDG genau dann, wenn

$$if'(t) = -k^2 f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

2b) Somit gilt $f(t) = f(0)\, e^{ik^2 t}$ und wegen $f(0) = 1$ weiter $\psi(t,x) = e^{kx} e^{ik^2 t} = e^{ik^2 t + kx}$.

3) Fouriers Lösungsformel sagt für $(t,x) \in \mathbb{R} \times (0,L)$ mit $k_n = n\pi/L$ und $\omega_n = ck_n$

$$A(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)\right) \sin(k_n x).$$

Daraus folgt, dass für $x \in (0,L)$

$$A(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(k_n x) = 0 \text{ und } \partial_t A(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \beta_n \sin(k_n x) = \omega_2 \sin(k_2 x).$$

Koeffizientenvergleich ergibt erstens $\alpha_n = 0$ für alle n und zweitens $\beta_2 = 1$ sowie $\beta_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus 2$. Daraus folgt für $(t,x) \in \mathbb{R} \times (0,L)$

$$A(t,x) = \sin(\omega_2 t) \sin(k_2 x)$$

und daher

$$A\left(t, \frac{L}{2}\right) = \sin(\omega_2 t) \sin\left(k_2 \frac{L}{2}\right) = \sin(\omega_2 t) \sin\left(2\frac{\pi}{L} \cdot \frac{L}{2}\right) = \sin(\omega_2 t) \sin(\pi) = 0.$$

4a) Es gilt also $A(0,x) = u(x) = x^2$ und $\partial_t A(0,x) = v(x) = 0$. Daraus folgt

$$A(t,x) = \frac{u(x-ct) + u(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi)\, d\xi = \frac{(x-ct)^2 + (x+ct)^2}{2} = x^2 + (ct)^2.$$

4b) Es gilt $\partial_t^2 A(t,x) = 2c^2$ und $\partial_x^2 A(t,x) = 2$, also $\Box A = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 A(t,x) - \partial_x^2 A(t,x) = 2 - 2 = 0$. Weiter gilt $A(0,x) = x^2$ und $\partial_t A(t,x) = 2c^2 t$, also $\partial_t A(0,x) = 0$.