d'Alemberts Wellengleichung mit (singulärer) Inhomogenität $\Box A = j$

1. *Retardierte Lösung für ruhende 1d Punktquelle:* Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}:\mathbb{R})$ mit $\int_{-\infty}^0 |f(x)|\,dx < \infty$. Dann existiert genau ein $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}:\mathbb{R})$ mit $F' = f$ und $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Zeigen Sie für die ruhende Punktquelle mit der formalen Darstellung $j(ct,x) = f(ct)\,\delta(x)$ durch Diracs Delta δ, dass
$$A_{ret}(t,x) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{ct}\left(\int_{x-(ct-\xi^0)}^{x+(ct-\xi^0)} j\left(\xi^0,\xi^1\right)d\xi^1\right)d\xi^0 = \frac{1}{2}F(ct-|x|) \text{ für } x \neq 0.$$
Hinweis: Benützen Sie die Regel $\int_{-\varepsilon}^{\eta}\delta(x)\,g(x)\,dx = g(0)$ für alle $\varepsilon,\eta > 0$ und für alle stetigen $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Welche Laufrichtung hat A_{ret} in den Bereichen $x<0$ bzw $x>0$? Gilt dort $\Box A_{ret} = 0$? Mit $\kappa, k \in \mathbb{R}_{>0}$ gelte $f(x) = \exp(\kappa x)\sin(kx)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie $F(x) = \exp(\kappa x)\sin(kx-\delta)/\sqrt{\kappa^2+k^2}$ mit $\delta := \arctan(k/\kappa)$.

2. **Aktiver & passiver nichtrelativistischer 1d Dopplereffekt:* Für ein $u\in\mathbb{R}$ mit $0 \le u < 1$ und ein $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ habe die bewegte Punktquelle die formale Darstellung $j(ct,x) = \Theta(t)\sin(\omega t)\,\delta(x-uct)$. Hier ist Θ Heavisides Stufenfunktion. Berechnen Sie A_{ret} wie in Bsp 1) auf $\left\{(ct,x)\in\mathbb{R}^2 : x > uct\right\}$, also rechts der Quelle. Ein Mikrofon durchläuft die Weltlinie $\{(ct, L+vct) : t\in\mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $-1 < v < 1$ und $L > 0$. Welche Frequenz $\omega_{rec}(\omega,u,v) =$? empfängt das 'Mikro' zu Zeiten t mit $uct < L + vct < ct$? Gilt $\omega_{rec}(\omega,u,u) = \omega_{rec}(\omega,0,0)$?

3. *Drehinvariante Lösung für drehinvariante, ruhende 3d 'Punktquelle':* Für $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}$ mit $\phi = f(r)/r$ und $r = |\cdot|$ und $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0}:\mathbb{R})$ gilt $\Delta\phi = f''(r)/r$. Sei $A : \mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^3\setminus 0\right)\to\mathbb{R}$ mit $A(t,x) = \psi(t,|x|)/|x|$ für ein $\psi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}:\mathbb{R})$. Es gilt $\Box A = 0$ genau dann, wenn $\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_r^2\right)\psi = 0$ auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$. Für $\Box A = 0$ existieren also zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}:\mathbb{R})$, sodass $A = A_{f,g}$ mit $A_{f,g}(t,x) := (f(|x|-ct) + g(|x|+ct))/|x|$ für alle $(t,x)\in\mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^3\setminus 0\right)$. Zeigen Sie:

   (a) $A_{f,0}$ (bzw $A_{0,g}$) läuft von der Singularität in $x=0$ weg (bzw auf die Singularität zu).

   (b) $A_{f,g}$ hat genau dann eine stetige Fortsetzung nach $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, wenn $f(x) = -g(-x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

   Die Figur 1 zeigt $x\mapsto A_{f,0}(t,x,0,0)$ mit $f(x) = 1/\left(1+x^2\right)$ für $t\in\{-2,0,2,4,6,8\}$ im Bereich $1 < x < 15$. Ein physikalisches Bild: Am Ort 0 sitzt eine zeitabhängige, drehinvariante Punktquelle, die im Fall von $A_{f,0}$ im anfänglich ruhende Medium eine Welle anregt. Im Fall von $A_{0,g}$ wird das anfänglich schwingende Medium von der Quelle ruhiggestellt bzw. die einlaufende Welle wird ausgelöscht. Im allgemeinen Fall von $A_{f,g}$ läuft g auf die Quelle zu, wird von dieser gelöscht und durch das auslaufende f ersetzt. Eine formelmäßige Präzisierung der Quelle j ist erst mit den Mitteln der Distributionentheorie möglich. Hier zeigt sich $j\neq 0$ nur in der Unbeschränktheit von $A(t,x)$ für $x\to 0$.

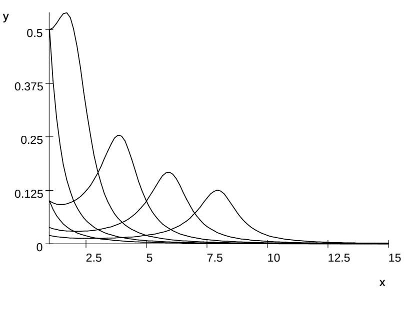

Figure 1: Momentaufnahmen einer auslaufenden Kugelwelle

4. *Strahlungsleistung einer harmonisch oszillierenden ruhenden 3d Punktquelle: (Freiwillig)*

   (a) Zeigen Sie: Hat f die Periode L, dann hat $A_{f,0}(\cdot, x)$ von Beispiel 3) die Periode $T = L/c$.

   (b) Bestimmen Sie für $A_{f,0}$ mit $f(x) = \sin(kx)$ und $k \in \mathbb{R}_{>0}$ die gesamte Energie, die während einer (zeitlichen) Periode durch eine Kugeloberfläche mit Radius R und Mittelpunkt 0 abströmt. Wie groß ist das Periodenmittel der Strahlungsleistung? Hängt es von R ab? *Hinweis:* Das Energiestromvektorfeld $T_A(t, \cdot)$ zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ erfüllt $T_A(t, \cdot) = -\partial_t A(t, \cdot) \cdot grad\,(A(t, \cdot))$. Zeigen Sie für $\partial K_R = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\right\}$

$$\overline{E}_R := \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_{\partial K_R} \left\langle T_A(t, x), \frac{x}{|x|} \right\rangle df = \frac{2\pi}{c}\omega^2 \text{ mit } \omega = ck = 2\pi/T.$$

5. Statisch belastete Trommelmembran[1] (Freiwillig): Sei $j(t, x) = -1$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ mit $|x| \leq R$ für ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Diese Inhomogenität j ist also drehinvariant und zeittranslationsinvariant[2]. Daher versuchen wir einen Lösungsansatz für $\Box A = j$ mit ebenderselben Symmetrie: Es gebe eine stetige Funktion $g : [0, R] \to \mathbb{R}$, sodass $A(t, x) = g(|x|)$ für alle $(t, x) \in D = \mathbb{R} \times \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\right\}$. Achtung: Dieser Ansatz liefert bei weitem nicht alle Lösungen von $\Box A = -1$ auf D.

   (a) Zeigen Sie für den Ansatz, dass $\Box A = j$ mit der drehinvarianten und statischen Randvorgabe $A(t, x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = R$ genau dann gilt, wenn $g(r) = \left(r^2 - R^2\right)/4$. Siehe Figur 2

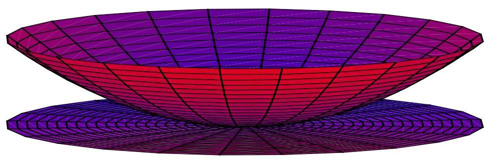

Figure 2: Kreismembran, statisch und gleichförmig belastet

   (b) Welche statische Lösung $A \in \mathcal{C}^2(D : \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}\left(\overline{D} : \mathbb{R}\right)$ von $\Box A = j$ erfüllt die inhomogene statische Randvorgabe $A(t, x) = C\cos(l\varphi(x))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = R$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \in \mathbb{R}$? Hinweis: Zerlegen Sie A gemäß $A = A_0 + A_p$ in eine (statische) Lösung A_0 von $\Box A_0 = 0$ (auf D) mit der Randvorgabe $A_0 = C\cos(l\varphi)$ auf ∂D und eine (statische) partikuläre Lösung A_p von $\Box A_p = j$ (auf D). Welcher Randvorgabe muss A_p genügen? Blicken Sie zurück auf Bsp. 4 von Blatt 5. Die Figur 3 zeigt die Lösung für $C = 1/4$ und $l = 4$.

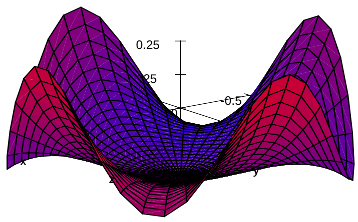

Figure 3: Statisch belastete Membran mit gewellter Randaufhängung

[1] Es ist dies ein Beispiel für ein statisches Randwertproblem. Es sagt im Rahmen der Elastomechanik, dass eine statisch und gleichmäßig belastete Kreismembran die Form eines Rotationsparaboloids annimmt. Spannen Sie eine Frischhaltefolie straff über ein mit Wasser halb gefülltes Glas, erhitzen Sie es in der Mikrowelle und warten Sie die Abkühlung ab.

[2] Statt 'zeittranslationsinvariant' sagt man auch 'statisch'.