
Symmetrien von partiellen Differentialgleichungen: 'invariante' Lösungen

1. *Verschiebungen:* Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Gesucht sind jene $\mathcal{C}^2$-Lösungen einer partiellen Differentialgleichung, die durch Komposition einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mit einer linearen Abbildung $L : V \to \mathbb{R}$ bzw $L : \mathbb{R} \times V \to \mathbb{R}$ zu erhalten sind. Je nach Bedarf ist im folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gewählt. Eine solche Lösung $f \circ L$ geht bei Verschiebung um einen Vektor $a \in \ker L$ in sich über, da ja $(f \circ L)(v + a) = (f \circ L)(v)$ für alle v im Definitionsbereich von L gilt. Die Menge der linearen Abbildungen eines reellen Vektorraums W auf seinen Skalarkörper $\mathbb{R}$ wird mit W^* bezeichnet.

   (a) *Laplace:* Bestimmen Sie die Menge M aller $\mathcal{C}^2$-Funktionen $u : V \to \mathbb{R}$ mit $\Delta u = 0$ und $u = f \circ L$ für ein $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein $L \in V^*$. Hinweis: Setzen Sie oEdA $L = \langle k,\cdot\rangle$ mit $k \in V$. *Lösung:* $M = \{u = L + a : L \in V^*, a \in \mathbb{R}\}$. Geben Sie $\ker \langle k,\cdot\rangle$ an.

   (b) *d'Alembert:* Bestimmen Sie die Menge M aller $\mathcal{C}^2$-Funktionen $A : \mathbb{R} \times V \to \mathbb{R}$ mit $\Box A = 0$ und $A = f \circ L$ für ein $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein $L \in (\mathbb{R} \times V)^*$. Hinweis: $L(t, x) = \omega t - \langle k, x\rangle$ für ein $k \in V$ und ein $\omega \in \mathbb{R}$. *Lösung:* $M = M_1 \cup M_2$ mit

   $$\begin{aligned} M_1 &= \left\{A = L + a : L \in (\mathbb{R} \times V)^*, a \in \mathbb{R}\right\}, \\ M_2 &= \left\{A = f \circ L_k : f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R}), k \in V\right\}, \end{aligned}$$

   wobei $L_k(t, x) = c\,|k|\,t - \langle k, x\rangle$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times V$ gilt. Lesen Sie für $k \neq 0$ an $\ker L_k$ die Phasengeschwindigkeit von $f \circ L_k$ ab.

   (c) *Schrödinger:* Bestimmen Sie die Menge M aller $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times V : \mathbb{C})$ mit $i\hbar\partial_t\psi = -\left(\hbar^2/2m\right)\Delta\psi$ und $\psi = f \circ L$ für ein $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und ein $L \in (\mathbb{R} \times V)^*$. Hinweis: $L(t, x) = \omega t - \langle k, x\rangle$ für ein $k \in V$ und ein $\omega \in \mathbb{R}$. *Lösung:* $M = \left\{\psi = ae^{-iL_k} + b : k \in V \text{ und } a, b \in \mathbb{C}\right\}$, wobei $L_k(t, x) = \frac{\hbar|k|^2}{2m}t - \langle k, x\rangle$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times V$ gilt. Lesen Sie für $k \neq 0$ an $\ker L_k$ die Phasengeschwindigkeit von e^{-iL_k} ab.

2. *Stehwellen:* Durch Addieren von Lösungen zu neuen Lösungen: Für $k \in V$ seien A_k und ψ_k die Lösungen von Bsp 1b) bzw 1c) mit $A_k(t, x) = \sin(c\,|k|\,t - \langle k, x\rangle)$ bzw $\psi_k(t, x) = e^{-i\hbar|k|^2t/2m}e^{i\langle k,x\rangle}$. Zeigen Sie für die Funktionen $C_k = A_k + A_{-k}$ bzw $C_k = \psi_k + \psi_{-k}$, dass

   $$\begin{aligned} A_k(t, x) + A_{-k}(t, x) &= 2\sin(c\,|k|\,t)\cos(\langle k, x\rangle), \\ \psi_k(t, x) + \psi_{-k}(t, x) &= 2e^{-i\hbar|k|^2t/2m}\cos\langle k, x\rangle. \end{aligned}$$

   Ist C_k wieder Lösung der jeweiligen partiellen Differentialgleichung?

3. *Drehungen:* Sei V ein 3-dimensionaler Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ samt zugehöriger Norm $r \equiv |\cdot|$. Gesucht sind alle $\mathcal{C}^2$-Funktionen $u : V \setminus 0 \to \mathbb{R}$ mit $\Delta u = 0$ und $u = f \circ r$ für ein $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Es gilt also $u \circ R = u$ für alle $R \in SO(V)$. *Lösung:* Alle Funktionen u mit $u = A/r + B$ für zwei feste Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$.

4. *Dehnungen:* Bestimmen Sie die Menge M aller $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} : \mathbb{C})$ mit

   $$i\partial_t\psi(t, x) = -\frac{1}{2}\partial_x^2\psi(t, x) \tag{1}$$

   und $\psi(t, x) = u\left(x/\sqrt{t}\right)$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$. *Lösung:* $M = \{\psi_b + a : a, b \in \mathbb{C}\}$. Dabei ist $\psi_b : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\psi_b(t, x) = b \cdot u\left(x/\sqrt{t}\right)$ und $u(x) = \int_0^x e^{is^2/2}ds$. Existiert ein $\psi \in M$ mit $\lim_{t\to 0}\psi(t, x) = \pm 1/2$ für $\pm x > 0$? *Lösung:* Ja, $\psi = \psi_b$ mit $b = (1 - i)/2\sqrt{\pi}$, also

   $$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\int_0^{x/\sqrt{t}} e^{i\frac{s^2}{2}}ds.$$

   Bemerkung: Die Funktion $K : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $K(t, x) := \partial_x\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi it}}e^{i\frac{x^2}{2t}}$ stimmt mit dem in der VO berechneten Evolutionskern der 1d freien Schrödingergleichung (1) überein.