Integration mit Residuensatz: Anwendung auf Schwingungsanregung

1. Sei $z_0 = \omega_0 + i\varepsilon$ für $\omega_0, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $P(z) = z_0^2 - z^2$. Zeigen Sie mit dem Residuensatz
$$G_\varepsilon(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{2\pi P(\omega)} d\omega = \frac{e^{iz_0|t|}}{2iz_0} = e^{-\varepsilon|t|} \frac{e^{i\omega_0|t|}}{2i(\omega_0 + i\varepsilon)}.$$
Ist G_ε stetig nach 0 fortsetzbar? Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $F(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(t)$.

2. Seien $\alpha, \omega_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < \omega_0$. Die absolutintegrable[1] und stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitze eine absolutintegrable Fouriertransformierte $\mathcal{F}f = \widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sodass nach dem Umkehrsatz
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \widetilde{f}(\omega)\, d\omega \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$
gilt. Gesucht ist nun eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der unterkritisch gedämpften Schwingungsgleichung (1) zur Anfangsvorgabe $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$. (Wenn es eine gibt, ist sie eindeutig bestimmt.)
$$x''(t) + 2\alpha x'(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t). \tag{1}$$
   (a) Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $P(z) = -z^2 + 2i\alpha z + \omega_0^2 \equiv -(z - i\alpha)^2 + \omega_0^2 - \alpha^2$. Machen Sie durch Vertauschen von Integration und Differentiation plausibel, dass die Funktion $x = \mathcal{F}^{-1}\widetilde{x}$ mit $\widetilde{x}(\omega) = \widetilde{f}(\omega)/P(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}$ die Gleichung (1) löst. Welche Nullstellen hat P? Ist $\widetilde{x}$ absolutintegrabel?

   (b) Machen Sie nun plausibel, dass für alle $t \in \mathbb{R}$
$$x(t) = (G_{ret} * f)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} G_{ret}(t - t') f(t')\, dt' \text{ mit } G_{ret}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{2\pi P(\omega)} d\omega,$$
und zeigen Sie durch Integration mit dem Residuensatz, dass $G_{ret}(t) = \Theta(t) e^{-\alpha t} \sin(\Omega t)/\Omega$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $\Omega := \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ und $\Theta(t) = 0\ \forall t \leq 0$ bzw $\Theta(t) = 1\ \forall t > 0$.

   (c) *Freiwillig:* Für $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ ist aus MM1 für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = e^{-\lambda|t|}$ bekannt, dass $\widetilde{f}(\omega) = \sqrt{2/\pi}\lambda/(\omega^2 + \lambda^2)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie durch Integration mit dem Residuensatz
$$x(t) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2 + 2\lambda\alpha + \omega_0^2} & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2 - 2\lambda\alpha + \omega_0^2} + \frac{4\alpha\lambda\left[\frac{\lambda^2 + \Omega^2 - \alpha^2}{2\alpha\Omega} \sin\Omega t - \cos\Omega t\right]}{\left(\lambda^2 + \omega_0^2\right)^2 - (2\alpha\lambda)^2} e^{-\alpha t} & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$
Figur (1) zeigt x für $\omega_0 = 2\pi, \lambda = 0,3$ im ungedämpften Grenzfall $\alpha \to 0$. ('Adiabatisches' Verhalten deutet sich an!)

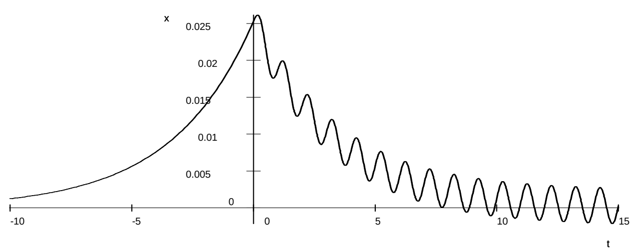

Figure 1: Langsame Schwingungsanregung

[1] Das uneigentliche Riemannintegral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ existiert.