
Laurentreihen; Komplexe Kurvenintegrale; eine lineare, gewöhnliche DG auf $\mathbb{C} \setminus 0$

1. Sei $z_0 = k_0 + i\varepsilon$ für zwei Zahlen $\varepsilon, k_0 \in \mathbb{R}$ mit $k_0 > 0$. Die Funktion $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei das Polynom $P(z) = z^2 - z_0^2$ und die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0\} \to \mathbb{C}$ erfülle $f(z) = e^{ixz}/P(z)$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie den Koeffizienten c_{-1} der Laurentreihe von f um z_0, also das Residuum von f an der Stelle z_0, an. Gegen welchen Wert konvergiert c_{-1} für $\varepsilon \to 0$?

2. Bestimmen Sie die Nullstellenmenge der auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Cosinusfunktion. Geben Sie das Residuum von $1/\cos$ in $\pi/2$ an. Hinweis: $\cos z = \left(e^{iz} + e^{-iz}\right)/2$.

3. Sei $R > 0$ und $\gamma_1 : [-2R, 0] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t + R$. Weiter sei $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto R \cdot \exp(it)$. Die Kurve $\gamma : [-2R, \pi] \to \mathbb{C}$ mit
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \leq 0 \\ \gamma_2(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$
parametrisiert daher einen in der oberen komplexen Halbebene liegenden Halbkreis um 0 (samt Durchmesser). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \frac{2R^3}{3}(2 - \alpha).$$
Beachten Sie: f ist holomorph $\Leftrightarrow \alpha = 2 \Leftrightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

4. *Bestimmen Sie (maximale) Lösungen y_1, y_2 der auf $\mathbb{C} \setminus 0$ definierten DG $y''(z) + z^{-2} y(z) = 0$ mit $y_1(1) = 1 = y_2'(1)$ und $y_1'(1) = 0 = y_2(1)$.

   Hinweis: Versuchen Sie auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{z : \Im z = 0 \text{ und } \Re z \leq 0\} =: \mathbb{C}_{cut}$ einen Potenzansatz $y(z) = z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ und dem Hauptzweig-ln. Geben Sie die Werte von y_1, y_2 auf der positiven reellen Achse an. Lösen die dadurch definierten Funktionen $\widetilde{y}_k : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ die reelle DG $y''(x) + y(x)/x^2 = 0$ auf $\mathbb{R}_{>0}$?

   Lösung auf $\mathbb{C}_{cut}$: mit $\alpha_\pm = \left(1 \pm i\sqrt{3}\right)/2$ gilt
$$y_1(z) = \frac{-\alpha_-}{\alpha_+ - \alpha_-} z^{\alpha_+} + \frac{\alpha_+}{\alpha_+ - \alpha_-} z^{\alpha_-} \text{ und } y_2(z) = \frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-} z^{\alpha_+} - \frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-} z^{\alpha_-}.$$
   Speziell für $z = x > 0$ gilt:
$$y_1(x) = \sqrt{x}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right], \quad y_2(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right).$$
   Nachbemerkung: Ein reelles Fundamentalsystem für $x < 0$ ist
$$\alpha_1(x) = \sqrt{|x|}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right), \quad \alpha_2(x) = \sqrt{|x|}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right).$$