Name:..Matrikelnr:..

Zahl der abgegebenen Blätter inkl Angabeblatt..................

Erste Klausur

1. (8P) Das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ steht zur Standardkarte (x, y) in der Beziehung $f = y - x^2$.
   (a) (1P) Der Punkt $(1, b)$ liege in jener Niveaumenge von f, die auch den Punkt $(0, 1)$ enthält. Welchen Wert hat b?
   (b) (1P) Geben Sie das Gradientenfeld von f an.
   (c) (2P) Geben Sie die Richtungsableitung von f unter $X = grad_p(f)$ im Punkt $p = (a, b)$ an.
   (d) (1P) Geben Sie das Skalarfeld $div\,(grad\,(f))$ an.
   (e) (2P) Ist das Vektorfeld $X = grad\,(f) / |grad\,(f)|$ konservativ? Hinweis: Prüfen Sie die Rotationsfreiheit.
   (f) (1P) Welchen Wert hat das Wegintegral von $grad\,(f)$ längs des Geradenstücks von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$?

2. (3P) Das Skalarfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ steht zur Standardkarte (x, y) in der Beziehung $g = x \cdot y$.
   (a) (1P) Geben Sie einen polaren Kartenausdruck von g an.
   (b) (2P) Berechnen Sie $\Delta g =$? in Polarkoordinaten.

3. (4 Punkte) Sei V ein orientierter, reeller Vektorraum der Dimension 3 und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei ein Skalarprodukt von V. Sei zudem $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ eine positiv orientierte ONB von V. Sei $X : V \to V$ das Vektorfeld mit $X(v) = e_2 \times (e_1 \times v)$ für alle $v \in V$.
   (a) (1P) Geben sie $divX$ an.
   (b) (1P) Geben Sie $rotX$ an. Hat X ein skalares Potential?
   (c) (2P) Geben Sie das Wegintegral von X längs der Kurve $\gamma : [0, 1] \to V$ mit $\gamma(t) = t \cdot (e_1 + e_2)$ an.

4. (5 Punkte) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = i - z^2$.
   (a) (1P) Geben Sie $|f(z)|$ und $\arg(f(z))$ für $z = i$ an.
   (b) (1P) Geben Sie den Hauptzweigwert von $\ln f(z)$ für $z = i$ an.
   (c) (1P) Geben Sie die Hauptzweigwurzel $\sqrt[2]{f(z)}$ für $z = i$ an.
   (d) (2P) Erfüllt f überall die Cauchy-Riemann-Gleichungen?

Lösung.

1. (a) Es gilt $f(1,b) = f(0,1)$, also $b - 1 = 1$. Damit gilt $b = 2$. Die Niveaumenge, auf der f den Wert $c \in \mathbb{R}$ annimmt ist die Parabel, auf der $y = c + x^2$ gilt.

   (b) Es gilt $grad(f) = (-2x, 1)$.

   (c) Es gilt $[grad(f)]_{(a,b)} f = \langle grad_{(a,b)}(f), grad_{(a,b)}(f) \rangle = \left| grad_{(a,b)}(f) \right|^2 = 1 + 4a^2$. Also $[grad(f)] f = 1 + 4x^2$.

   (d) Es gilt $div(grad(f)) = \Delta f = -2$.

   (e) Es gilt

$$X = \frac{\begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+4x^2}}$$

   und daher

$$\partial_x X^2 - \partial_y X^1 = \partial_x X^2 = \partial_x \left(1+4x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -4x\left(1+4x^2\right)^{-3/2}.$$

   Das Feld X ist also nicht rotationsfrei und daher auch nicht konservativ.

   (f) Es gilt für eine beliebige d'bare Kurve γ von $(0,0)$ nach $(1,0)$

$$\int_\gamma grad(f) = f(1,0) - f(0,0) = -1.$$

   (g) *Wurde gelöscht Feldlinien von $grad(f)$*: Es gilt mit $\xi = x \circ \gamma$ und $\eta = y \circ \gamma$

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\xi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Das System ist entkoppelt. Die maximale Lösung mit $\xi(0) = a$ und $\eta(0) = 0$ erfüllt

$$\xi(t) = \xi(0) e^{-2t} = ae^{-2t} \text{ und } \eta(t) = \eta(0) + t = t.$$

   Die Feldlinie durch $(a,0)$ ist also die Punktmenge $\left\{(r,s) : r = ae^{-2s}\right\}$. Keine Feldlinie endet im Endlichen. Hier einige Niveaulinien (grün) und Feldlinien (rot).

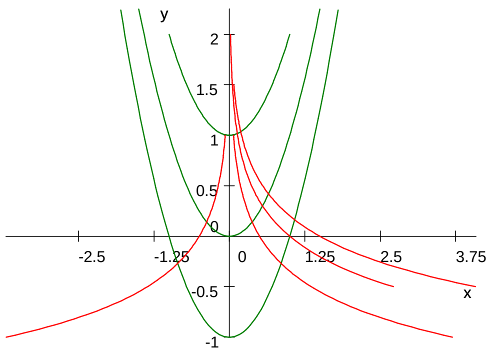

Figure 1:

2. Für $g = xy$ folgt mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\cos\varphi$

   (a) $g = r^2 \cos\varphi \sin\varphi = r^2 \sin(2\varphi)/2$ und

   (b) $\Delta g = \left(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\varphi^2\right) r^2 \sin(2\varphi)/2 = (2+2-4)\sin(2\varphi)/2 = 0$.

3. Es gilt $X(v) = e_2 \times (e_1 \times v) = e_1 \langle e_2, v\rangle - v\langle e_1, e_2\rangle = e_1 \langle e_2, v\rangle$.

   (a) Es $div_v X = \langle e_1, grad_v \langle e_2, \cdot\rangle\rangle = \langle e_1, e_2\rangle = 0$, also $div X = 0$.

(b) Es gilt $rot_v X = grad_v \langle e_2, \cdot \rangle \times e_1 = e_2 \times e_1 = -e_3$. Das VF X hat daher kein skalares Potential.

(c) Es gilt $\dot{\gamma}(t) = e_1 + e_2$ und daher

$$\begin{aligned}\int_\gamma X &= \int_0^1 \langle X(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle \, dt = \int_0^1 \langle e_1 \langle e_2, t \cdot (e_1 + e_2)\rangle, e_1 + e_2\rangle \, dt \\ &= \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4. Sei $f(z) = i - z^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(a) Es gilt $f(i) = f(z) = i - i^2 = 1 + i$ und daher $|f(i)| = \sqrt{2}$. Es gilt $\arg(f(i)) = \pi/4$.

(b) Es gilt $\ln f(z) = \ln \sqrt{2} + i \arg f(z) = \frac{1}{2} \ln 2 + i\pi/4$

(c) Es gilt $\sqrt[2]{f(i)} = \exp \frac{1}{2} \ln z = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$.

(d) Es gilt $f(x + iy) = i - \left(x^2 - y^2 + 2ixy\right)$ und daher $u(x, y) = y^2 - x^2$ und $v(x, y) = 1 - 2xy$. Für die Jacobimatrix folgt daraus

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_x v \\ \partial_y u & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 2y & -2x \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_y u = -\partial_x v$, sodass die CR-Gleichungen erfüllt sind.