Komplexe Zahlen, Wurzel(n), Logarithmus und Holomorphie

1. Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $|w \cdot z| = |w|\,|z|\,, \quad |1/z| = 1/\,|z|\,.$
2. Geben Sie für die vier Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -1$ die folgenden Größen an: $|z|\,, \Re z, \Im z, \arg(z)\,.$
3. $\arg\left(1 + i\sqrt{3}\right) \;=?, \quad \arg\left(\sqrt{3} - i\right) \;=?$ Berechnen Sie Betrag und Argument von $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}$ und von $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$ für den Hauptzweig der Wurzelfunktion. Geben Sie auch die Hauptzweigwerte von $\ln\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ und $\ln\left(\sqrt{3} - i\right)$ an.
4. Kontrollieren Sie für die folgenden Funktionen f, ob die jeweils zugehörigen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten.

   (a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$.

   (b) $f : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/z$.

   (c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sin(z)\,.$

   (d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und festes $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Legen Sie eine Liste der (harmonischen!) Funktionen $\Re f$ und $\Im f$ an, die dieses Beispiel abwirft. Geben Sie auch die Kartenausdrücke dieser Funktionen in Polarkoordinaten an.

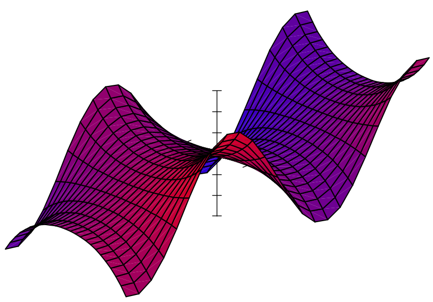

Figure 1: Die harmonische Funktion $\sin(x)\cosh(y)$

5. Geben Sie reelle Funktionen u, v an, sodass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ gilt:

$$u(x, y) + iv(x, y) = \ln(x + iy)\,.$$

   Hier bezeichnet ln den Hauptzweig der Logarithmusfunktion. Drücken Sie u und v durch elementare reelle Funktionen aus. Berechnen Sie: $i^i := e^{i \ln i} =?$