*Rotation, Vektorpotential*

1. Berechnen Sie $rot\,(X)$ für $X$ aus Beispiel 3, Blatt 2. (Freiwilliger Zusatz: Überprüfen Sie die bei Blatt 2 berechneten Wegintegrale von $X$ mit dem Satz von Stokes.)

2. *Vektorpotential eines unendlich langen geraden Stromfadens:* Sei $V$ ein reeller, orientierter, dreidimensionaler Vektorraum. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei eines der Skalarprodukte von $V$. Sei $e \in V$ mit $|e| = 1$ und $c \in \mathbb{R}$. Es gelte[1] auf $U = V \setminus (\mathbb{R} \cdot e)$ für das Vektorfeld $B$
$$cB(p) = \frac{e \times p}{|e \times p|^2}.$$
$B$ hat die Symmetrien: $B \circ R = R \circ B$ für alle Drehungen $R$ um $e$ und $B \circ T_{\lambda e} = B$ für alle Translationen von $V$ um $\lambda e$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Beachten Sie: $|e \times p|$ ist der Abstand von $p$ zur Achse $\mathbb{R} \cdot e$.
   (a) Zeigen Sie $div(B) = 0$ und $rot(B) = 0$ auf $U$.
   (b) Berechnen Sie mit dem Ansatz $cA(p) = f(|e \times p|) \cdot e$ (auf $U$) ein Vektorpotential zu $B$. Finden Sie also eine Lösung $A$ von $B = rot(A)$. Gibt es mehrere Lösungen?[2]
   (c) Ist $B$ konservativ?

3. *Vektorpotential eines magnetischen Punktdipols:* Sei $V$ ein reeller, orientierter, dreidimensionaler Vektorraum. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei eines der Skalarprodukte von $V$. Das magnetische Flussdichtefeld eines Punktdipols mit dem magnetischen Dipolvektor $m \in V$ in 0 ist das Vektorfeld $B : U = V \setminus 0 \to V$ mit[3]
$$cB\,(v) = \frac{1}{|v|^3}\left(3\frac{\langle m, v\rangle}{|v|^2}v - m\right).$$
   (a) Zeigen Sie für das Vektorfeld $A : U \to V$ mit $cA\,(v) = (m \times v)\,/\,|v|^3$, dass $B = rot\,(A)$.
   (b) Zeigen Sie $rot\,(B) = 0$. Hinweis: Ist $B$ konservativ? Beachten Sie Beispiel 2c von Blatt 2 oder rechnen Sie einfach mit den Faulenzerregeln drauflos.

4. Sei $B$ wie in Beispiel 3. Bestimmen Sie zu dem Ansatz $cA\,(v) = f\,(|v|) \cdot (m \times v)$ auf $U$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, für die $B = rot\,(A)$ gilt.

[1] $B$ ist für $1/c = \mu_0 \frac{I}{2\pi}$ das Magnetfeld eines auf $\mathbb{R} \cdot e$ in Richtung $e$ fließenden Stromes der Stärke $I$.
[2] Eine Lösung ergibt sich mit $cf(x) = -\ln(x)$.
[3] Dabei ist $c = 4\pi/\mu_0$.