Gradient, Divergenz, Laplace

1. Sei (x, y) die Standardkarte von $V = \mathbb{R}^2$ und $|\cdot| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   (a) Für $u : V \to \mathbb{R}$ gelte $u = x^2 - y^2$. Zeigen Sie $\Delta u = 0$. Auf $V \setminus 0$ gelte $X = grad\,(u) \,/\, |grad\,(u)|$. Zeigen Sie $X = (x, -y)\,/r$ und $divX = -u/r^3$ auf $V \setminus 0$.
   (b) Für $L : V \to V$ gelte $L = (-y, x)$ (Drehvektorfeld). Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $X = f\,(r) \cdot L$ auf $V \setminus 0$. Zeigen Sie $div\,(X) = 0$.

2. Das elektrische Potential $\Phi : V \setminus 0 \to \mathbb{R}$ eines Punktdipols erfüllt mit $c = 4\pi\varepsilon_0$
   $$c \cdot \Phi\,(v) = |v|^{-3} \cdot \langle p, v \rangle\,.$$
   Dabei ist V ein 3d Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt von V, $|\cdot|$ die zugehörige Norm und $p \in V \setminus 0$ der Vektor des Dipolmoments. Eine lineare Abbildung $R : V \to V$ mit $\langle Rv, Rw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und $detR > 0$ heißt Drehung von V. Ist $p \in V$ Eigenvektor einer Drehung R zum Eigenwert 1, dann heißt R Drehung um die Achse $\mathbb{R} \cdot p$.
   (a) Zeigen Sie die Invarianz $\Phi \circ R = \Phi$ von Φ unter Drehungen $R : V \to V$ um die Achse $\mathbb{R} \cdot p$.
   (b) Skizzieren Sie die Schnittmengen einiger Niveaumengen von Φ mit einem 2d Unterraum von V, der p enthält. Hinweis: Machen Sie ein Polardiagramm.
   (c) Das Feldstärkefeld $E = -grad\,(\Phi)$: Zeigen Sie für $v \in V \setminus 0$
   $$grad_v\,[c \cdot \Phi] = |v|^{-3} \Big(p - 3\,|v|^{-2}\,\langle p, v \rangle \cdot v\Big)\,.$$
   (d) Geben Sie $grad_v\,[c \cdot \Phi]$ für $p = e_3$ und $v = |v|\,(\cos\theta \cdot e_3 + \sin\theta \cdot e_1)$ mit $0 \le \theta < 2\pi$ als Funktion von θ an.[1]

3. Zeigen Sie $\Delta\Phi = 0$ für das elektrische Potential Φ eines Punktdipols.

4. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei ein Skalarprodukt von V und $r := |\cdot|$ die zugehörige Norm.
   (a) Für ein $k \in V$ sei $f(v) := \sin\langle k, v \rangle$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie $\Delta f + |k|^2\, f = 0$. (Helmholtz'sche Schwingungsgleichung)
   (b) Für $k, q \in V$ sei $f(v) := \langle k, v \rangle\,\langle q, v \rangle$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie $\Delta f = 2\,\langle q, k \rangle$. Figur 1 zeigt den Spezialfall $n = 2$ für $\langle q, k \rangle = 0$, eine sogenannte Sattelfläche
   (c) (Freiwillig) Für eine symmetrische lineare Abbildung $A : V \to V$ sei $f(v) := \langle v, Av \rangle$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie $\Delta f = 2Sp\,(A)$.

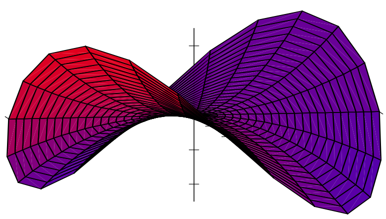

Figure 1: Die Funktion $f\,(x, y) = xy$

[1] (e_1, e_2, e_3) sei eine ONB von V.