Gradient; Vektorfelder mit bzw ohne Potential

1. Bestimmen Sie die Gradientenfelder zu den Skalarfeldern f der Beispiele 1, 3 und 4 von Blatt 1.

2. Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $X : V \to V$ mit $X(x, y) = \left(x^2 y, xy^2\right)$. (Figur 1) Zeigen Sie für das Kurvenintegral von X längs der Kurve $\gamma : [0, 1] \to V$ mit $\gamma(t) = \left(1 - t, t^2\right)$

$$\int_\gamma X := \int_0^1 \langle (X \circ \gamma)(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \frac{1}{70}.$$

Skizzieren Sie die Bahn von γ, also die Punktmenge $\gamma([0, 1]) \equiv \{\gamma(t) : 0 \le t \le 1\}$.

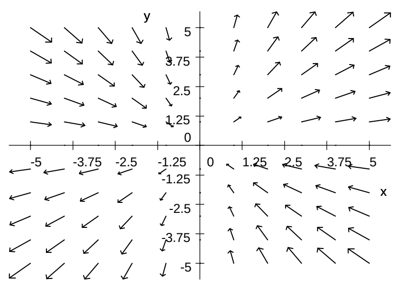

Figure 1: Das Vektorfeld $\left(x^2 y, xy^2\right)$

3. Ein ebenes Stück Erdoberfläche sei als Schnitt der Ebene $z = -1$ mit dem Würfel $W_L = (-L, L)^3 \subset \mathbb{R}^3$ beschrieben. Es sei $L > 1$. Auf $U = \{p \in W_L : z(p) > -1\}$ habe das Gravitationspotential $\Phi : U \to \mathbb{R}$ den Standardkartenausdruck

$$\Phi = g\left(z + \frac{\varepsilon}{L}\left(x^2 - y^2\right)\right).$$

Dabei ist g die Erdbeschleunigungskonstante und ε ein Störparameter mit $|\varepsilon| \ll 1$. Auf einen kleinen Körper der Masse m wirkt am Ort $p \in U$ somit die Schwerkraft $-m \cdot grad_p(\Phi)$.

Zwei Zahlen $r_1, r_2 \in (0, L)$ seien gewählt. Ebenso die Kurven

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: [0, \pi/2] \to U \text{ mit } \gamma_1(t) = r_1 \cdot (\cos t, \sin t, 0), \\
\gamma_2 &: [0, \pi/2] \to U \text{ mit } \gamma_2(t) = r_2 \cdot (\cos t, \sin t, 0), \\
\eta_1 &: [r_1, r_2] \to U \text{ mit } \eta_1(t) = (t, 0, 0), \\
\eta_2 &: [r_1, r_2] \to U \text{ mit } \eta_2(t) = (0, t, 0).
\end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die Bahnen dieser vier Kurven samt Durchlaufsinn und die Niveaufläche von Φ durch den Punkt 0.

(b) Berechnen Sie die Wegintegrale des Vektorfeldes $X = grad(\Phi) / |grad(\Phi)|$ von $p_1 = (r_1, 0, 0)$ nach $p_2 = (0, r_2, 0)$ längs der beiden Wege $\eta_2 \cup \gamma_1$ bzw $\gamma_2 \cup \eta_1$. Beobachten Sie: Obwohl beide Wege vollständig in der $z = 0$ Ebene verlaufen, würde eine Höhenmessung mit Wasserwaage und Meterstab einen (wegabhängigen!) 'Höhenunterschied' zwischen p_1 und p_2 ergeben.

(c) Hat das Vektorfeld X ein Potential?

(d) Ist X wirbelfrei?

(e) Welche Werte haben die analogen Wegintegrale für das Vektorfeld $Y = grad(\Phi/g)$? Unterscheiden auch sie sich voneinander? Was wird neben Wasserwaage und Meterstab noch benötigt, um ein Wegintegral von Y zu messen?

4. (Freiwillig) Sei (x, y) die Standardkarte von $V = \mathbb{R}^2$. Für $L : V \to V$ gelte $L = (-y, x)$ (Drehvektorfeld). Es soll nun mit verschiedenen Methoden gezeigt werden, dass L kein Potential hat, d.h., dass *keine* Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ mit $L = grad\,(f)$ existiert.

   (a) Direkte Methode: Zeigen Sie, dass die beiden Differentialgleichungen (bezüglich der Standardbasis) $-y = \partial_1 f$ und $x = \partial_2 f$ keine Lösung f haben.

   (b) Indirekt: Zeigen Sie, dass L nicht rotationsfrei ist.

   (c) Sei $\gamma_1 : [-R, R] \to V$ mit $\gamma_1(t) = (t, 0)$. Zeigen Sie $\int_{\gamma_1} L = 0$. Sei $\gamma_2 : [0, \pi] \to V$ mit $\gamma_2(t) = (R \cos t, R \sin t)$. Zeigen Sie $\int_{\gamma_2} L = R^2 \pi$. Warum folgt daraus, dass L kein Potential hat?

   (d) Sei γ eine Kurve in V, deren Bildmenge der Rand eines achsenparallelen Quadrats mit der Seitenlänge 2ε und mit dem Mittelpunkt $(a, b) \in V$ ist. Die Kurve durchlaufe den Rand im Gegenuhrzeigersinn einmal. Zeigen Sie, dass $\int_\gamma L = 8\varepsilon^2 =$ Doppelte Fläche des Quadrats. Das Integral ist also unabhängig von (a, b).
   Hinweis: Die untere Seite des Quadrats kann folgendermaßen durchlaufen werden
   $$\gamma_1 : [-\varepsilon, \varepsilon] \to V \text{ mit } \gamma_1(t) = (a + t, b - \varepsilon)\,.$$
   Wählen Sie für die drei weiteren Seiten analoge Kurven.

   (e) Sei nun $X = \frac{1}{x^2+y^2} L$ auf $V \setminus 0$. Sei γ wie oben eine Kurve, die den Rand eines (beliebigen) Quadrats im Gegenuhrzeigersinn einmal durchläuft. Zeigen Sie
   $$\int_\gamma X = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } (0,0) \text{ innerhalb des Quadrats liegt} \\ 0 & \text{falls } (0,0) \text{ außerhalb des Quadrats liegt} \end{cases}\,.$$
   Falls γ durch $(0, 0)$ führt, ist $\int_\gamma X$ nicht definiert. Hinweis: Auf der geschlitzten Ebene gilt $X = grad\,(\phi)$.