Legendrefunktionen und tesserale[1] Kugelfunktionen

1. Geben Sie die Legendrefunktion $P_l^m : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit
$$P_l^m(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}{2^l \cdot l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m} \left(x^2-1\right)^l$$
und die kartesischen Kartenausdrücke der zugehörigen Kugelfunktionen
$$C_l^m = P_l^m(\cos\theta) \cdot \cos(m\varphi), \quad S_l^m = P_l^m(\cos\theta) \cdot \sin(m\varphi)$$
für alle Werte $(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $l \leq 2$ und $m \leq l$ an.

2. Für das elektrostatische Potential $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}$ eines Punktdipols mit Dipolmomentenvektor $p \in \mathbb{R}^3$ gilt $\Phi(v) = c\langle p, v\rangle / |v|^3$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie, dass Konstanten $A_0, A_1, B_1 \in \mathbb{R}$ existieren, sodass auf dem Kartenbereich U der Kugelkoordinaten (r,θ,φ) gilt:
   $$\Phi = \frac{c}{r^2}\left[A_0 \cdot P_1^0(\cos\theta) + P_1^1(\cos\theta) \cdot (A_1 \cdot \cos\varphi + B_1 \cdot \sin\varphi)\right].$$
   Hinweis: Es existiert eine dehnungsinvariante Funktion $Y : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(v) = \frac{c}{|v|^2} Y(v)$. Es gilt bekanntlich $\Delta\Phi = 0$. Welche partielle DG erfüllt daher Y?

   (b) Welche Werte haben die Zahlen A_0, A_1, B_1 für $p = e_3$, für $p = e_2$ und für $p = e_1$, wenn (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$ ist? Welche Werte haben die Zahlen A_0, A_1, B_1 für einen beliebigen Vektor $p \in V$?

3. Sei Y_l eine Linearkombination der Funktionen $\{C_l^m\}_{m=0}^l \cup \{S_l^m\}_{m=1}^l$ und $u, v : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}$ mit $u = \sum_{l=0}^N \frac{1}{r^{l+1}} Y_l$ bzw $v = \sum_{l=0}^N r^l Y_l$. Zeigen Sie, dass u, v harmonisch sind.[2]

[1] Tessera: lateinisch für 'das Mosaiksteinchen'; hier einige aus dem Bodenbelag der Basilika von Aquileia.
[2] Das Gravitationspotential der Erde ist außerhalb des Erdkörpers eine Funktion vom Typ u. Diese wird in Form der Entwicklungskoeffizienten α_m^l, β_m^l mit $Y_l = \sum_{m=0}^l \alpha_m^l C_l^m + \sum_{m=1}^l \beta_m^l S_l^m$ speicherplatzsparend tabelliert.